*

En teori om presise deskriptive utsagn

*

Morten Rognes

1995

*

Filosofisk institutt, Universitetet i Oslo

> "Med logiske lover mener jeg ikke psykologiske lover om hvordan man anser noe for å være sant, men lover om sannheten selv. Hvis det er sant at jeg skriver dette på arbeidsrommet mitt den 13. juli 1893 mens vinden hyler utenfor, da er det sant selvom alle mennesker senere skulle anse det for usant. Og dersom det at noe er sant er uavhengig av hvorvidt noen innser det, da er ikke sannhetens lover psykologiske lover, men grensestener som plasseres i evighetens terreng: Tenkningen vår kan riktignok drukne dem, men aldri flytte dem."
>
> (Gottlob Frege)

INNHOLD

§1 Innledning......1
§1.1 Noen uformelle kommentarer til språket L:e[Δ:0]......1
§2 En presis definisjon av teorien T;1......3
§2.1 Aksiomet U1......4
§2.2 Aksiomet U2......4
§2.3 Aksiomet U3......5
§2.4   Aksiomet U4 5
§2.5 Samlet overblikk over hele teorien......5
§2.6 Noen kommentarer......6
§3 Grunnleggende definisjoner......7
§4 Noen viktige teoremer i teorien T;1......8
§4.1   Intepretasjoner og konsistensresultater......13
§4.2 Reduksjon av T;1......19
§4.3   Noen kritiske bemerkninger. Forholdet mellom T;1 og Kripke-modeller. 20
§5   Fullstendighetsaksiomet. Den svakere teorien T;1-......22
§5.1   Utvidelser av teorien T;1-. Aksiomene U7 - U14......22
§5.2   Om forholdet mellom de nye aksiomene. Ekvivalensteoremet......24
§6   Noen kommentarer til spearabilitetsaksiomet......28
§6.1   Teorien T;2. En teori som ikke inneholder separabilitetsaksiomet......28
§7   T;1 og T;2 med identitetsaksiomet fjernet. 32
§8 Om en familie med utvidelser av teorien T;1. Forholdet mellom urindivider, mulige verdener og utsagn......38
§9 Om mulige videreføringer av T;1......40
§10 Kritiske bemerkninger til T;1......41
§11 Oppsummering og avslutning......42
APPENDIX A......46
Noen bemerkninger om teorien T;1 og dens sammenheng med Boolske algebraer......47
APPENDIX B......52
Et sammendrag av systemet ZFCu(L)......53
Copyright beskrivelse......56

§1 Innledning

I dette arbeidet vil det bli gitt en fremstilling av en teori om presise deskriptive utsagn. Teorien vil hovedsakelig bli døftet fra en logisk synsvinkel. I langt mindre grad vil erkjennelsesteoretiske eller mer generelle filosofiske sider ved den bli kommentert. Det er nødvendig at leseren kjenner arbeidet Rognes [1], siden vi uten kommentarer vil benytte den notasjon og de defini-sjoner i forbindelse med klassisk logikk og mengdelære som det er gitt en oversikt over der.

Teorien er en første-ordens teori i et første-ordens språk.[1] Det ikke-logiske vokabularet til dette språket består, i tillegg til medlemskapspredikatet "x er et element i mengden y" og predikatet "x er en mengde", av de følgende konstruksjoner:[2]

(1) "x er en logisk mulig verden ". Denne konstruksjonen forkortes med "MV(x)".
(2) "x er et presist deskriptivt utsagn". Denne konstruksjonen forkortes med "Ut(x)".
(3) "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant". Når det gjelder denne konstruksjonen benyttes uttrykket "True(w,x)" som forkortelse.

Kalles mengden som inneholder nøyaktig konstruksjonene (1) - (3), og bare dem, for Δ;0, er språket til teorien språket for mengdelære,L;e, utvidet med konstruksjonene i mengden Δ;0 som nye ikke-logiske konstruksjoner.[3] Uttrykket "L,e[Δ;0]" betegner dette språket. [4]

§1.1 Noen uformelle kommentarer til språket L:e[Δ:0]

Det kan være gunstig på dette punkt å fremsette endel uformelle kommentarer til språket L;e[Δ;0] og de konstruksjonene som inngår i det. Først bemerker vi at det virker rimelig å karakterisere alle de ikke-logiske kon-struksjonene i språket som meningsfulle og forholdsvis klare. Dette gjelder såvel de mengdeteoretiske konstruksjonene i L;e[Δ;0] som konstruksjonene (1) -(3) ovenfor. Når det gjelder de sistnevnte konstruksjoner er det ikke opplagt at det finnes eller er mulig å formulere adekvate definisjoner av dem. Vi tar dem derfor som primitive, udefinerte predikater, og utsetter noe spørsmålet om det er mulig å redusere språket L;e[Δ;0] til et språk som inneholder færre, og klarere, ikke-logiske konstruksjoner. Ønsker man imidlertid å redusere visse begreper synes det naturlig å undersøke de relasjoner mellom begrepene som intuitivt sett synes å holde før man foretar en reduksjon. I motsatt fall kan det være vanskelig å avgjøre om reduksjonen er rimelig eller ikke.[5] Dette vil derfor være fremgangsmåten i det følgende.

---

[1] Det begrep første-ordens språk vi har i tankene her er presist definert i Rognes[1], §3.

[2] En nøyaktig definisjon av hva som her menes med en konstruksjon er gitt i Rognes[1],§2 og §2.1 - §2.4. I det vesentlige er en n-ær konstruksjon en funksjon som til ethvert n-tuple av uttrykk tilordner et uttrykk. Med et uttrykk forstår vi da en endelig sekvens av tegn hvor tegnene er de store og små bokstaver i det norske alfabet, komma-, punktum-, og apostrofftegnet, samt tegnene for høyre - og venstre-håndsparantes og et tegn for åpen plass. Uttrykket "x er en mulig verden" kan da oppfattes som en konstruksjon i denne forstand siden vi alltid får et nytt uttrykk hver gang vi setter inn et vilkårlig uttrykk for tegnet "x".

[3] Språket for mengdelære, som vi her betegner med "L;e", er det første-ordens språket som ved siden av de vanlige logiske konstruksjoner også inkluderer de to konstruksjonene "x er et element i mengden y", som vi forkorter med "xêy" og konstruksjonen "x er en mengde" som vi forkorter med "M(x)". Dette er de eneste ikke-logiske konstruksjonene. I L;e inngår de vanlige logiske konstruksjonene, nemlig de utsagnslogiske ordene &, v, ¬, –> og <–>. Videre regnes selvfølgelig allkvantoren, A, og eksistenskvantoren, E, samt identitetspredikatet, =, blandt de logiske konstruksjonene i språket. Det bør bemerkes at vi med et første-ordens språk her alltid forstår det samme som et første-ordens språk med identitet. Språket L;e er mer presist definert i Rognes[1], §4.

[4] Uttrykket "L;e[Δ;0]" betegner språket L;e utvidet med konstruksjonene i Δ;0 som nye ikke-logiske konstruksjoner. Er L et hvilket som helst første-ordens språk og Δ en mengde med konstruksjoner betegner "L[Δ]" det første-ordens språket som fremkommer om det ikke-logiske vokabularet til L utvides med konstruksjonene i Δ. Se Rognes [1], §4.

La oss fremsette noen mer uformelle betraktninger angående den intuitive tolkningen av konstruksjonene (1) - (3) i §1. Med presise deskriptive utsagn tenkes her på den type entiteter som er meningsinnholdet til det som vanligvis kalles utvetydige presise påstandssetninger, mao. det som svært mange filosofer og logikere kaller "propositions".[6] Med en mulig verden forstås en entitet som deler denne mengden av presise deskriptive utsagn i to innbyrdes disjunkte mengder, nemlig på den ene side alle de utsagn som er sanne i verdenen og på den annen side alle de utsagn som er usanne i den. Kaller man en mengde med presise deskriptive utsagn for maksimalt konsistent dersom det ikke er mulig å legge til ytterligere utsagn uten at mengden blir inkonsistent, er en mulig verden det totale saksforhold som blir beskrevet av en slik maksimalt konsistent utsagnsmengde. Tilslutt vil vi si at et utsagn er sant i en bestemt mulig verden hvis og bare hvis det beskriver et mulig saksforhold som foreligger realisert i denne verden eller er en del av det totale saksforhold som utgjør den mulige verdenen. Disse temmelig løse og svevende formuleringene som vi her har fremlagt er naturligvis ikke ment som tilfredstillende definisjoner, men som antydninger om hvordan konstruksjonene skal oppfattes.

For å unngå misforståelser nevner vi også at når det i det følgende snakkes om mulige verdener menes logisk mulige verdener. Siden det vel kan hevdes at f. eks. visse viktige fysiske lover logisk sett kan være usanne kan det altså finnes verdener der det fysiske hendelsesforløp strider mot de fysiske teorier som mange i dag har en viss tiltro til.

---

[5] Et lignende synspunkt på reduksjoner er også fremsatt i Prawitz [1], side 134.

[6] Vi har i tankene et utsagnsbegrep som tilsynelatende ligger svært nær opp til det begrep 'proposition' som det gjøres rede for i Carnap [1], §6, side 25 - 32. Carnaps diskusjon er lesverdig og klargjørende. Som Carnap har vi her i tankene et syn på utsagn som innebærer at utsagn oppfattes om utenom-språkelige, ekstramentale objekter. Carnap uttrykker på side 30 at "Any proposition must be regarded as a complex entity, consisting of component entities, which, in turn, may be simple or again complex." Det virker imidlertid som om vi ikke kan gi noen mening til en slik oppfatning av utsagn uten relativt til en eller annen språkramme. Gitt et intepretert språk L kan vi betrakte klassen av alle de utsagn som uttrykkes av de lukkede formlene i L. Til ethvert utsagn u i denne klassen vil det da i L svare en ekvivalensklasse av setninger, nemlig alle de setninger i L som uttrykker dette utsagn. La oss betegne denne ekvivalensklassen av formler i L som uttrykker u med e(u). Da har vi at e(u) Inkl CFm(L). Man kunne da kanskje anse et utsagn u;1 som mer komplisert enn et utsagn u;2 relativt til språket L om den korteste eller de korteste setningene i e(u;1) er lengre enn den korteste, eventuelt de korteste, setningene i e(u;2). Denne kompleksitetsrelasjonen vil, som man ser, være fullstendig språkrelativ. Og selvom man kanskje kan gi mening til predikatet "Utsagnet u;1 er mer komplisert enn utsagnet u;2 relativt til L" på denne måten har man ikke dermed gitt noen rimelig redegjørelse for betydningen til f. eks. konstruksjoner av typen "Utsagnet u;1 er en komponent i utsagnet u;2" eller "Egenskapen E er en komponent i utsagnet u" eller lignende. Tale om komponenter, kompleksitet etc. gir forholdsvis klar mening om de relevante entiteter er formler, prdikater, termer eller lignende syntaktiske størrelser. Men det synes som om de syntaktiske strukturer som rettferdiggjør slike talemåter ikke uten videre kan projiseres inn i mangfoldet av utsagn uten en betydelig grad av vilkårlighet.

Forøvrig synes det utsagnsbegrep vi har i tankene å være svært nær relatert til det utsagnsbegrep som innføres i Prawitz[1] og Cresswell [1], side 23-24. I motsetning til Cresswell reduserer vi imidlertid ikke med en gang utsagn til mengder av mulige verdener, men er interessert i å studere de intuitivt sett rimelige egenskaper ved utsagn som kan rettferdiggjøre en slik reduksjon.

Avslutningsvis bemerker vi også at en logisk mulig verden ikke nødvendigvis er mulig å se for sitt indre blikk. Mulige verdener kan kanskje tenkes som er av en så kompleks natur at det er umulig for noe erkjennende subjekt å danne seg et forestillingsbilde av selv de enkleste deler av dem. Når det gjelder anskuelighet synes det derfor treffende å si at mulige verdener står i samme stilling som andre matematiske entiteter, eksempelvis tall, funksjoner og mengder og forøvrig andre entiteter med den samme objektive natur.[7]

§2 En presis definisjon av teorien T;1

Vi vil nå gi en presis definisjon av den teorien som vil bli studert nærmere i dette arbeidet. I det vi benytter forkortelsene som ble innført i §1 ser vi på de følgende setninger i L;e[Δ;0]:

U1 (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx <–> MV(y)) & Ca(x)≥ Aleph;0)
U2 (Ax)(Ay)(Ut(x) & Ut(y) –>
(x=y <–> (Aw)(MV(w) –>(True(w,x) <–> True(w,y)))))
U3 (Aw)(Ax)(True(w,x) –> (Ut(x) & MV(w)))
U4 (Ax)(M(x) & (Ay)(yêx –> MV(y)). –>.
(Ez)(Ut(z) & (Aw)(True(w,z) <–> wêx)))

Mengden med setninger i L;e[Δ;0] som inneholder nøyaktig setningene U1 - U4 og bare dem kalles for ∏;0. Teorien er følgelig det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L;e[Δ;0]) utvidet med setningene i ∏;0 som nye ikke-logiske aksiomer, med andre ord teorien ZFCu(L;e[Δ;0])[∏;0]. Denne teorien kalles for T;1 og vi setter T;1 = ZFCu(L;e[Δ;0])[∏;0].[8]

---

[7] Begrepet mulig verden som synes å være svært fruktbart ved studiet av utsagn, og også i forbindelse med studiet av modallogiske systemer av forskjellig art, går tilbake til Leibniz og er beslektet med Wittgensteins begrep om mulige totale saksforhold. Det er også nært relatert til det Carnap i Carnap [1], §2, side 9 - 13 kaller tilstandsbeskrivelser (state-descriptions). Det bør likevel bemerkes at Carnaps begrep tilstandsbeskrivelse er språkrelatert. Er f. eks. L et første-ordens språk med konstanter så er en tilstandsbeskrivelse over L en klasse av setninger i L som for hver atomær setning i L enten inneholder denne eller dens negasjon, men ikke begge. Det følger derfor at mulige verdener, som intuitivt sett ikke er språkrelative, ikke uten videre kan identifiseres med tilstandsbeskrivelser i denne forstand. En annen grunn til at en slik reduksjon må begrunnes nærmere er følgende forhold: Anta L er et språk som bare inneholder tellbart uendelig mange symboler, blandt dem uendelig mange konstanter. Da vil språket inneholde i høyden 2^(Aleph;0) formelmengder. Mengden av tilstandsbeskrivelser i L vil derfor i sin tur i høyden være likemektig med 2^(Aleph;0). La oss si at en verden w beskrives av en tilstandsbeskrivelse i L dersom alle setningene i tilstandsbeskrivelsen er sanne i verdenen, og la oss anta at det for hver tilstandsbeskrivelse finnes en logisk mulig verden som beskrives av den. Distinkte tilstandsbeskrivelser vil da beskrive distinkte verdener. Er nå mengden av mulige verdener av større mektighet en 2^(Aleph;0) må det finnes flere distinkte verdener som beskrives av den samme tilstandsbeskrivelse. Intuitivt kan man derfor ikke uten videre bringe de mulige verdenene i en-entydig korrespondanse med tilstandsbeskrivelsene i et språk L som inneholder bare tellbart uendelig mange symboler. Dette utelukker ikke at det er mulig å gjøre dette om L er et overtellbart språk. Men selvom det er mulig å redusere mulige verdener til Carnapianske tilstandsbeskrivelser er man ikke tvunget til å gjøre det og det virker ikke spesielt naturlig. Det er derfor en del forhold som taler til fordel for å innføre mulige verdener som et primitivt begrep slik det gjøres her.

[8] Det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L) er definert presist i Rognes [1], §10, for ethvert første-ordens språk L som er en utvidelse av L;e. I det velkjente system ZFC er verdiområdet for variablene det som vanligvis kalles rene mengder. Vårt system ZFCu er en modifikajon av dette system. Verdiene til variablene er nå entiteter generelt, mengder såvel som ikke-mengder. For å kunne uttrykke påstander om mengder innfører vi mengdepredikatet "M(x)", "x er en mengde" i tillegg til medlemskapspredikatet "xêy", "x er medlem av mengden y". Er nå L et eller annet første-ordens språk som er en utvidelse av L;e, er systemet ZFCu(L) den første-ordens teorien i L som har som slutningsregler modus ponens og universell generalisering, og som videre har et standardsett av aksiomer for de utsagnslogiske konnektivene, kvantorene og identitet som logiske

Det er på sin plass å kommentere denne teorien forholdsvis utførlig før vi går videre. Vi vil først reformulere i ord setningene U1 - U4 og komme med enkelte bemerkninger om den intuitive rimeligheten til disse setningene. Dernest vil vi innføre endel begreper som er uunnværlige i forbindelse med teorien T;1, blandt annet et sett med operasjoner på utsagn som svarer til de vanlige Boolske operasjoner på mengder. Vi vil så betrakte to teorier som er sterkere enn T;1 hvor utsagn blir identifisert med henholdsvis mengder av mulige verdener og karakteristiske funksjoner over mengden av mulige verdener. Når så alt dette er unnagjort vil vi mer detaljert diskutere aksiomene i T;1, og se på andre alternativer til T;1, dvs. alternative aksiomatiseringer av T;1.

§2.1 Aksiomet U1

La oss starte med U1. Hva denne setningen sier er at det finnes en mengde med følgende to egenskaper, nemlig for det første at ethvert element i den er en mulig verden og omvendt at enhver mulig verden er med i den. For det andre sier setningen at denne mengden har den egenskap at den er minst tellbart uendelig. Man erindrer at om x er en mengde betegner uttrykket "Ca(x)" kardinaltallet til mengden. Videre betegner "Aleph;0" det første uendelige kardinaltallet. Uttrykt litt kortere sier U1 rett og slett at mengden av mulige verdener eksisterer og at denne mengden er minst tellbart uendelig. Vi kaller dette aksiomet for *eksistens og kardinalitetsaksiomet for mengden av alle mulige verdener*.

Hvor rimelig er så dette aksiomet? Det er vanskelig å si noe autoritativt i denne forbindelse, men setningen virker forholdsvis fornuftig og det er vanskelig å se hvordan man skal kunne utlede noen åpenbare absurditeter fra den i nærvær av de andre setningene i T;1. Men det er muligens noe drøyt å si at setningen er direkte evident. Den svakere antagelse at det finnes en mengde som bare inneholder mulige verdener og som er minst tellbart uendelig, ie:

U1' (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx –> MV(y)) & Ca(x) ≥ Aleph;0)

synes imidlertid temmelig uskyldig og svært rimelig og er naturlig nok forenelig med den antagelse at Mg(x: MV(x)) ikke er noen mengde. Antar man imidlertid at enhver mengde med mulige verdener bare inneholder et endelig antall elementer kan man i nærvær av U2 - U4 vise at klassen av utsagn er endelig, noe som virker direkte unaturlig. Dette styrker ens tiltro til U1' og dermed også i noen grad til U1. Konklusjonen er følgelig at U1 virker som en fornuftig "arbeidshypotese", men heller ikke mer.

§2.2 Aksiomet U2

U2 uttrykker, om man reformulerer innholdet i vanlig språk, at to utsagn er identiske om de er sanne i nøyaktig de samme mulige verdenene. Vi kaller denne setningen for *identitetsaksiomet for utsagn*. Det er vanlig i endel logisk litteratur å anse to setninger som ekvivalente dersom og bare dersom de er sanne i nøyaktig de samme logisk mulige verdener.

---

aksiomer. Som ikke-logiske aksiomer har teorien alle ZFCu-aksiomene i L. Et kort sammendrag av disse aksiomene er gitt i Appendix B. Forøvrig bemerker vi at det i Rognes [5] og Rognes [6] er bevist en rekke konsistensresultater for systemet ZFCu(L) utvidet med forskjellige aksiomer om mengden av urindivider, dvs. mengden av ikke-mengder. Er T en førsteordens teori i L, betegner T[Z] den nye første-ordens teorien man får når T utvides med formlene i Z som nye ikke-logiske aksiomer. Siden T=ZFCu(L;e[Δ;0]) er en første-ordens teori i L;e[Δ;0] betegner T[∏;0]= ZFCu(L;e[Δ;0])[∏;0] den teorien vi får når ZFCu(L;e[Δ;0]) utvides med formlene i ∏;0 som nye ikke-logiske aksiomer. Notasjonen her er mindre elegant og noe klumsete, men har den fordel at man med en gang kan avlese hvilket språk det er man har i tankene og hvilke formler det er man ønsker å legge til som nye ikke-logiske aksiomer.

Og det er videre vanlig å si at to logisk ekvivalente setninger uttrykker det samme presise deskriptive utsagn. Sett i dette lys virker setningen U2 plausibel og fornuftig. Dog har dette den konsekvens at om alle matematiske setninger anses som sanne i alle mulige verdener uttrykker alle slike setninger det samme utsagn. Dette kan muligens virke noe eiendommelig. Likevel kan dette inntrykk, som kan virke mildt paradoksalt, muligens fjernes om man erindrer at utsagn her innebærer *deskriptive* utsagn, utsagn som gir en beskrivelse, om de er sanne , av hvordan verden faktisk er. Tenker man seg at matematiske setninger ikke er av denne beskrivende natur, forekommer det en kanskje mindre eiendommelig å si at de alle uttrykker det samme utsagn. Imidlertid er det ingenting i veien for å betrakte en teori der flere distinkte utsagn kan være sanne i nøyaktig de samme logisk mulige verdener. Vi vil senere ta for oss en slik teori og vise hvordan T;1 kan intepreteres inn i den. Som en konklusjon synes det likevel berettiget å si at U2 virker plausibel og igjen at den kan karakteriseres som en fornuftig arbeidshypotese.

§2.3 Aksiomet U3

La oss så rette blikket mot U3. Som man ser sier denne setningen at dersom w er en mulig verden hvor utsagnet y er sant så er w en logisk mulig verden og y et utsagn. Uansett hva man måtte mene om de andre setningene i §2 fortoner i alle fall dette seg så innlysende at flere kommentarer skulle være overflødige på dette punkt.

§2.4 Aksiomet U4

Av setningene U1 - U4 forekommer det oss som om U4 er den setningen som virker minst innlysende. U4 uttrykker, om man formulerer setningen i vanlig språk, at dersom en mengde utelukkende inneholder mulige verdener så finnes det alltid et utsagn som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene som inngår i mengden. Dette aksiomet vil vi i mangel av et bedre navn kalle for *fullstendighetsaksiomet for utsagn*. I senere paragrafer vil dette aksiomet bli diskutert mer utførlig. Akkurat her vil vi bare nevne at vi ikke fra denne setningen sammen med de andre vi har nevnt har lykkes i å utlede noen setninger i L;e[Δ;0] som virker direkte uplausible, slik at vi av denne grunn ikke har funnet det påkrevet å forkaste U4. Snarere synes det som om U4 bidrar til å fullstendiggjøre og avrunde teorien; denne setningen gjør det mulig for oss å utlede en rekke setninger om utsagn som åpenbart virker rimelige og som vi ellers ikke ville ha kunnet utlede om vi hadde fjernet setningen fra T;1. Som et ytterligere argument vil vi også nevne at vi senere vil vise at T;1 er konsistent med ZF. Dette innebærer at man vanskelig fra en rent formell logisk sysnsvinkel kan rette innvendinger mot T;1 og dermed mot de aksiomer som inngår i den, deriblandt U4. Men dette viser selvfølgelig ikke at U4 er usann.

§2.5 Samlet overblikk over hele teorien.

La oss nå ta et overblikk over hele teorien T;1. Ved siden av de ikke-logiske aksiomene U1 - U4 som inngår i denne teorien, og som vi nå har funnet forholdsvis rimelige, inngår det en rekke andre ikke-logiske aksiomer, nemlig de mengde-teoretiske.[9] Det virker som om de aksiomene av denne art som vi har valgt å arbeide med må kunne karkteriseres som temmelig fornuftige. Tenker man seg mengdeuniverset generert kumulativt ved at man på nivå 0 starter med et bunnsjikt av ikke-mengder, såkalte urindivider, og at mengdene på nivå a+1 er alle dem på nivå a pluss alle delmengder på dette nivå, når a er et ordinaltall, og at nivå b er unionen av alle tidligere nivåer når b er et limes-ordinaltall, ser man forholdsvis lett at våre mengdeteoretiske aksiomer er intuitivt gyldige om denne kumulative mengdeoppfatningen legges til grunn.[10] Ganske visst er dette ikke det eneste fornuftige mengdebegrep som kan tenkes, og det har da også blitt konstruert en hel flora av alternative systemer som modifisert på passende måte kunne ha tjent samme formål som vårt system ZFCu er tiltenkt. I denne forbindelse er det tilstrekkelig å nevne systemet til von Neumann, Gødel og Bernays, eller f.eks. de Quinske systemer. Når vi har valgt systemet ZFCu er det imidlertid fordi vi kjenner dette systemet best, fordi det er såpass nær relatert til ZFC, som synes å være velkjent og allment akseptert som en fornuftig basis for mengdelæren, og endelig fordi mer subtile synspunkter på mengdebegrepet ikke er direkte relevante for en analyse av utsagnsbegrepet.

---

[9] Leseren henvises til Rognes [1], §10. I tillegg er det gitt en oversikt over aksiomene i Appendix B.

Tilslutt inngår de logiske aksiomene i L;e[Δ;0] blandt aksiomene i T;1. Vi har valgt et ordinært sett av slike aksiomer. Det skulle være vanskelig å se at det skulle være mulig å rette noen virkelig alvorlige innvendinger mot disse. I tillegg inngår så de to slutningsreglene modus ponens og universell generalisering som de eneste slutningsreglene i vår teori. Som helhet virker derfor teorien T;1 plausibel. Dog er det vel på sin plass å bemerke at vi ikke påstår at den er direkte evident, utvilsom riktig, el. Naturligvis anser vi heller ikke den logiske eller mengdeteoretiske basis for vår teori som original bortsett fra det punkt at vi har innført to primitive mengdeteoretiske predikater, "xêy" og "M(x)", ved formuleringen av ZFCu og modifisert de vanlige ZFC-aksiomene tilsvarende slik at vi tillater eksistensen av urindivider, dvs. entiteter som ikke er mengder. La oss tilslutt bemerke at vi ikke her vil ta opp grunnlagsspørsmål i forbindelse med klassisk logikk og mengdelære. Dette ville egentlig være noe på siden fordi vi her er opptatt med grunnlaget for en teori om utsagn og mulige verdener, og spesielt med antagelsene U1 - U4, og ikke med grunnlaget for de andre deler av teorien T;1.[11] Vi skriver for dem som stort sett aksepterer vanlig logikk og mengdelære og ikke for en mer spesiell "sekt" av intuisjonister, konstruktivister el.

§2.6 Noen kommentarer.

I det følgende vil vi bare ta opp til drøftelse setninger om utsagn og mulige verdener som kan uttrykkes innenfor rammen av språket L;e[Δ;0]. Siden vi råder over en rik mengdeteoretisk begrepsapparatur lar en temmelig stor mengde med slike setninger seg uttrykke i dette språket. Men det vil naturlig nok være en rekke setninger om mulige verdeners og utsagns ontologiske, såvel som epistemologiske, status som neppe kan reformuleres innenfor rammen av L;e[Δ;0]. Som eksempler på slike setninger nevner vi her – vårt utvalg av eksempler er noe vilkårlig – følgende filosofisk pregede setninger: "Mulige verdener eksisterer uavhengig av den menneskelige bevissthet.", "Mulige verdener har ikke koordinat i tid og rom", "Den påstand at mulige verdener eksisterer kan ikke utledes fra fullstendig selvinnlysende utsagn", "Det er meningsløst å uttale om en mulig verden at den befinner seg i en viss avstand fra et menneskelig individ", "Når en person taler vil vedkommende ikke vanligvis ha oppmerksomheten rettet mot de presise deskriptive utsagn som vedkommende uttaler", "Det er logisk mulig for et erkjennende individ å rette oppmerksomheten mot to utsagn slik at vedkommende har en helt dekkende bevissthet om at det ene utsagnet impliserer det andre."

---

[10] I denne forbindelse kan man konsultere Rognes [5] og Rognes [6].

[11] Vi er ikke av den mening at vi har innført svært mange nye og originale ideer i dette arbeidet. Snarere er det slik at vi oppfatter T;1 og de andre teoriene som senere vil bli betraktet som en systematisering av ideer som allerede lenge har blitt uttrykt av filosofer og logikere som har vært interessert i semantikk og modal-logikk. Imidlertid synes ikke, såvidt vi kan se, noen tidligere å fremsatt helt eksplisitt teorien T;1 og sammenlignet den med de teoriene som vi senere vil formulere, T;2 – T;4, på den måten som det gjøres her. I tillegg til at vi her er helt eksplisitte når det gjelder det mengdeteoretiske grunnlag, noe som ikke virker helt vanlig, synes dette å representere noe nytt. Dog er ikke originalitet og oppsiktsvekkende nyheter egentlig det viktikste punkt. Det viktige er teorien T;1 i seg selv og det å avklare de vitenskapslogiske, metafysiske og andre implikasjoner denne teorien har. Fra en matematisk synsvinkel anser vi også innsatsen som beskjeden. Ingen av de satser som vi senere vil nevne er av en slik art at bevisene krever ekstra-ordinær innsats og dyp fortrolighet med avanserte konstruksjonsmetoder.

Ingen av disse setningene (Man bør for all del ikke tro at vi mener de er sanne eller har tatt stilling til sannhetsverdien av dem) kan såvidt vi er i stand til å se reformuleres innenfor rammen av L;e[Δ;0], og heller ikke en rekke andre setninger som kanskje er minst like interessante. I det følgende vil vi derfor heller ikke ta stilling til disse setningene og heller ikke undersøke nærmere om det er mulig å begrunne dem ved henvisning til setninger av mer allmen natur. Vi vil altså begrense våre undersøkelser til L;e[Δ;0] uten derfor å benekte at svært meget interessant som kan sies om mulige verdener ikke kan gis uttrykk innenfor dette språk.

§3 Grunnleggende definisjoner.

I det følgende betegner vi mengden av alle logisk mulige verdener med "I", mengden av alle utsagn betegnes med U. Mengden av alle de mulige verdener hvor utsagnet x er sant betegnes med "s(x)". s(x) kalles for sannhetsmengden til utsagnet x. Den funksjonen som tilordner ethvert utsagn utsagnets sannhetsmengde betegner vi med "μ". Vi gir den følgende formelle definisjon av de begrepene vi her har nevnt:

Definisjon 1: (a) I = Mg(x: MV(x))
(b) U = Mg(x: Ut(x))
(c) s(x) = Mg(w: wêI & True(w,x))
(d) μ = Mg(<x,s(x)> : xêU)

I tillegg til disse begrepene vil vi nå også innføre visse andre operasjoner på utsagn. Anta x er et utsagn. Da kaller vi det utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdnene hvor utsagnet x er usant for negasjonen av x og betegner det med "Neg(x)". Er a en klasse med utsagn kaller vi det utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene hvor alle utsagnene i a er sanne for *den uendelige konjunksjonen av utsagnene i mengden a* og betegner dette utsagnet med "SNu(a)". Det utsagnet som er sant i de og bare de verdnene hvor minst ett av utsagnene i mengden a er sant kaller vi for *disjunksjonen av utsagnene i mengden a* og betegner dette med "UNu(a)". Er x og y to utsagn er *konjunksjonen* av dem, K(x,y), det utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdnene hvor begge er sanne. *Disjunksjonen av x og y*, D(x,y), er det utsagnet som er sant i nøyaktig de verdener hvor minst et av utsagnene x og y er sant. Er videre x og y to utsagn er *kondisjonalutsagnet som har x som antesedent og y som konsekvent* det utsagnet som er identisk med Neg(K(x,Neg(y))). Dette utsagnet betegner vi med "C(x,y)". *Ekvivalensutsagnet som har x som venstre komponent og y som høyre komponent* er så konjunksjonen av C(x,y) og C(y,x). Dette utsagnet betegner vi med "E(x,y)". De begrepene som vi nå har definert i ord kan gis de følgende helt formelle definisjoner:

Definisjon 2: (a) Neg(x) = (iy)(yêU & s(y) = I – s(x))
(b) SNu(a) = (iy)(yêU & s(y)=IΩSN(Mg(s(x): xêa)))
(c) UNu(a) = (iy)(yêU & s(y)=UN(Mg(s(x): xêa)))
(d) K(x,y) = (iz)(zêU & s(z) = s(x)Ωs(y))
(e) D(x,y) = (iz)(zêU & s(z) = s(x)Us(y))
(f) C(x,y) = Neg(K(x,Neg(y)))
(d) E(x,y) = K(C(x,y), C(y,x))

Man ser fra denne definisjonen at operasjonene Neg, UNu, SNu,K og D over mengden av utsagn er helt analoge med operasjonene komplement, uendelig snitt og union, endelig snitt og endelig union over mengden av mengder. Vi trenger ytterligere noen begreper. Funksjonen som til enhver familie av mulige verdensmengder tilordner snittet av mengdene i familien kaller vi for "SNi". Funksjonen som til enhver mengde av mulige verdener tilordner komplementet med hensyn på I betegner vi med c;i. Vi gir den følgende definisjon:

Definisjon 3: (a) SNi = Mg(<a,SN(a)> : aêPt(Pt(I)))
(b) c;i = Mg(<a, I–a> : aêPt(I))

§4 Noen viktige teoremer i teorien T;1

Vi skal i denne pragrafen bevise en rekke viktige setninger som lar seg utlede i teorien T;1. Den første setningen sier at funksjonen µ avbilder klassen av utsagn en-entydig på mengden av delmengder av I. Vi har:

Teorem 1: I teorien T;1 er den følgende setning et teorem:
(i) µ: U – (1-1,på) –> Pt(I)

Bevis: Vi må først bevise (1) Dom(µ) = U. Anta derfor for vilkårlig x at (2) xêDom(µ). Fra definisjonen av domenet til en funksjon og definisjonen av funksjonen µ har vi da at det finnes y slik at : (3) <x,y> = <z,µ(z)> for en eller annen entitet z der (4) zêU. Fra (3) følger åpenbart at x=z. Dette og (4) impliserer at xêU. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (1) holder.

Vi må også vise inklusjonen mot venstre. Anta derfor for vilkårlig x at (5) xêU. Nå har vi per definisjon at (6) s(x)= Mg(w: wêI & True(w,x)). Det følger herav at (7) s(x) Inkl I. Siden M(I) følger fra (7) og utsondringsaksiomet at M(s(x)) og herav at det finnes y slik at (8) y= s(x). Fra (5) og (8) følger
(9) <x,y> = <x,s(x)> & xêU. Men fra dette og definisjonen av µ følger <x,y>êµ. Dette i sin tur impliserer (Ey)(<x,y>êµ) og dermed at xêDom(µ). Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for (1).

Imidlertid må vi også vise at (10) Rgn(µ) = Pt(I). Anta derfor at (11) xêRgn(µ) for vilkårlig x. Fra definisjonen av Rgn(µ) følger da eksistensen av y slik at (12) <y,x>êµ. Fra (12) og definisjonen av funksjonen µ følger eksistensen av z som er slik at (13) <y,x> =<z,s(z)> & zêU. Fra (13) følger i sin tur at (14) x=s(z). Men fra definisjonen av funksjonen s har vi :

(15) s(z)= Mg(w: wêI & True(w,z)).

Da følger s(z) Inkl I og dermed i lys av (14) at x=s(z)êPt(I). Er på den annen side x et vilkårlig element i Pt(I) har vi åpenbart at (16) x Inkl I. I lys av *fullstendighetsaksiomet for utsagn* følger det da at det finnes z der

(17) zêU & s(z)=x

Fra dette følger så i sin tur (18) <z,x> = <z,s(z)> & zêU. Derfor har vi, ved hjelp av definisjonen av µ, at (19) <z,x>êµ. Herav følger så xêRgn(µ). Dermed har vi også vist at (10) holder. Tilslutt må vi vise:

(20) Func(µ) & Func(µ;-1)

Anta derfor for vilkårlige x,z;1 og z;2 at (21) <x,z;1>,<x,z;2>êµ. Fra definisjonen av µ følger da eksistensen av y;1 og y;2 slik at:

(22) <x,z;1> = <y;1,s(y;1)> & y;1êU
(23) <x,z;2> = <y;2,s(y;2)> & y;2êU

Men fra (22) og (23) har vi y;1 = x = y;2 og derfor at z;1=s(y;1)=s(x) =s(y;2) =z;2. Dette viser at µ åpenbart er en funksjon. Anta på den annen side for vilkårlige x;1,x;2 og z at (24) <x;1,z>,<x;2,z> êµ. Fra definisjonen av µ følger da eksistensen av y;1 og y;2 der man har:

(25) <x;1,z>=<y;1,s(y,1)> & y;1êU
(26) <x;2,z> = <y;2,s(y;2)> & y;2êU

Herav følger s(y;1)=s(y;2) & y;1,y;2êU. Dette sammen med U2, *identitetsaksiomet for utsagn*, impliserer at y;1=y;2, som så i lys av (25) og (26) impliserer x;1=x;2. Dette viser at også (20) holder. Men fra (1), (10) og (20) følger imidlertid at
µ: U –(1-1,på) –>Pt(I) som nettopp er det vi ønsker. **Q.E.D**.

Teoremet som vi har gitt et bevis for ovenfor vil vi kalle *entydighetsteoremet for funksjonen µ*. Vårt neste teorem viser at U er lukket under operasjonene Neg, SNu, UNu, K, D, C og E. Denne sats kalles derfor *lukningsteoremet*.

Teorem 2: (Lukningsteorem) Anta x,yêU. Da gjelder:
(a) Neg(x)êU (b) K(x,y)êU (c) D(x,y)êU
(d) C(x,y)êU (e) E(x,y)êU
Anta videre at M(a) & a Inkl U. Da gjelder følgende:
(f) SNu(a)êU & UNu(a)êU

Bevis: Vi vil ikke gi et helt fullstendig bevis for dette teoremet. Dette overlates til leseren. Derimot vil vi bevise enkelte av punktene slik at leseren selv lett kan iakta selve bevismetoden.

(i) Vi viser at Neg(x)ê U om xêU

Anta derfor at (1) xêU. I lys av definisjonene av "Neg(x)" og "U" er det den følgende formel vi ønsker å bevise:

(2) U((iy)(yêU & s(y)=(I - s(x))))

I lys av våre konvensjoner for hvordan bestemte beskrivelser skal elimineres er imidlertid (2) ekvivalent med:

(3) (Ez)(U(z) & (Ay)((yêU & s(y)= I -s(x)) <–> y=z))

Fra (1) følger s(x) Inkl I og følgelig at I - s(x) Inkl I. Herav: (I - s(x))êPt(I). Fra dette og Teorem 1 har vi at µ;-1(I-s(x))êU. Sett nå z;0= µ;-1(I-s(x)). Da har vi altså (4) z;0êU, med andre ord at: (5) U(z;0). Anta for vilkårlig y at yêU &s(y)= I- s(x). Siden s(z;0)=I - s(x) har vi at s(y)=s(z;0). Fra dette og identitetsaksiomet følger y=z;0. Er på den annen side y=z;0 har vi i lys av (5) at U(y) og derfor at yêU. Vi må da også ha at s(y)=s(z;0)=I - s(x). Det følger i så fall at U(y) & s(y)=(I-s(x)). Vi har dermed vist at (6) (Ay)((yêU & s(y)= I -s(x)) <–> y=z;0)). Fra (5) og (6) følger så (3) som er det vi ønsker.

(ii) Vi vil også gi bevis for at (M(a)& a Inkl U) –> SNu(a)êU

Anta derfor for vilkårlig a at (1) M(a) & a Inkl U. Fra definisjonene av SNu(a) og U ser man da at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(2) (Ez)(U(z) & (Ay)((yêU & s(y)= SN(Mg(s(x): xêa))ΩI) <–> y=z)

Nå har vi i lys av definisjonen av µ at (3) (Ax)(xêU –> µ(x)=s(x)). Videre har vi siden a Inkl U at (4) (Ax)(xêa –> s(x) Inkl I). Det følger derfor at:

(5) (SN(Mg(s(x): xêa)) Ω I) Inkl I

I lys av U1 har vi at I er en mengde mao. at M(I). Det følger derfor fra dette, (5) og utsondringsaksiomet at SN(Mg(s(x): xêa)) Ω I er en mengde og derfor at
(6) z;1= SN(Mg(s(x): xêa)) Ω I for noe z;1. Fra Teorem 1 følger da eksistensen av z;2 slik at (7) U(z;2) & µ(z;2)=s(z;2)=z;1. Er nå y et vilkårlig objekt der yêU og hvor vi dessuten har: s(y)= SN(Mg(s(x): xêa))ΩI følger at s(y) = s(z;2) og derfor i lys av U2 at y=z;2. Er på den annen side y=z;2 har vi ved hjelp av (6) og (7) at:

yêU & s(y)= SN(Mg(s(x): xêa)) Ω I. Dette viser at det følgende holder:
(8) (Ay)((yêU & s(y)= SN(Mg(s(x): xêa)) Ω I) <–> y=z;2). Fra (7) og (8) følger så (2) som er det vi ønsker. Resten av teoremet bevises så etter den samme metoden som den vi her har demonstrert. **Q.E.D.**

Teorem 1 viser kun at μ avbilder mengden av utsagn en-entydig på mengden av delmengder av I. Teoremet viser imdlertid ikke at det foreligger en art strukturlikhet eller isomorfi mellom utsagn på den ene side og mengder av mulige verdener på den annen side. At dette siste faktisk er tilfelle viser det følgende teorem som det derfor ikke er helt unaturlig å kalle isomorfi-teoremet:

Teorem 3: (Isomorfi-teorem) Anta S,1=<U, SNu, Neg> og at S;2= <Pt(I), SNi, c;i>. Da er μ en isomorfi mellom S;1 og S;2. Dvs. at vi har:
(i) μ: U –(1-1,på) –> Pt(I)
(ii) (Ax)(xêU –> μ(Neg(x)) = c;i(μ(x)))
(iii) (Aa)((a≠ø & a Inkl U &M(a)) –> μ(SNu(a))= SNi(Mg(μ(x): xêa)))

Det bør bemerkes her at vi betegner operasjonen som til hver utsagnsmengde a tilordner SNu(a) med "SNu" og at vi tilsvarende betegner operasjonen som til ethvert utsagn x tilordner x utsagnet Neg(x) med "Neg".

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Når det gjelder det første punktet i satsen er dette bare en gjentagelse av Teorem 1. Denne delen kan derfor anses som bevist.

La oss derfor gi et bevis for punkt (ii) i teoremet. Anta for vilkårlig x at
(1) xêU. Vi må vise at μ(Neg(x)) = c;i(μ(x)). Anta derfor for vilkårlig w at
(3) wêμ(Neg(x)). Vi har at (Ax)(xêU –> μ(x)= s(x)). (3) er derfor ekvivalent med (4) wês(Neg(x)). I lys av definisjonen av s er dette ekvivalent med at
(5) True(w,Neg(x)). Fra definisjonen av Neg ser man imidlertid at (5) holder hvis og bare hvis :

(6) (Er)(True(w,r) & U(r) & (Ay)((yêU & s(y)=I-s(x)) <–> y=r))

Nå er imidlertid (6) ekvivalent med (7) wê(I-s(x)) som, siden s(x)=μ(x), er ekvivalent med
(8) wê(I-μ(x)) I lys av definisjonen av c;i ser man at (8) holder hvis og bare hvis wêc;i(μ(x)). Dette gir oss et bevis for (ii). Men for tydelighetens skyld skal vi vise den påstand at (6) og (7) er ekvivalente. Dette kan innses på den følgende måte: Anta (6) holder. Da finnes r slik at:

True(w,r) & U(r) & (Ay)((yêU & s(y)=I-s(x)) <–> y=r)

Siden r=r følger umiddelbart: True(w,r) & s(r) = (I-s(x)). Fra dette følger så wês(r) og derfor at wê(I-s(x)). Dette viser at (6) impliserer (7). At (7) impliserer (6) innser man således:

Anta (9) wê(I-s(x)). Vi har (I-s(x))êPt(I) og derfor i lys av Teorem 1 at det finnes r slik at (10) U(r) & r=μ;-1(I-s(x)). Er nå y=r har vi U(y) & s(y)=(I-s(x)). Har man på den annen side yêU & s(y)=(I-s(x)) følger s(y)=s(r) og derfor i lys av identitesaksiomet for utsagn at y=r. Dette viser at:

(11) (Ay)((yêU & s(y)=(I-s(x))) <–> y=r)

Siden wê(I-s(x)) har vi imidlertid også at (12) wês(r), dvs. at (13) True(w,r). Fra (10), (11) og (13) følger så (6). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (ii) i teoremet.

La oss så se på punkt (iii) i satsen. Anta for vilkårlig a at (1) a≠ø & a Inkl U og at M(a). Det som må bevises er at (2) μ(SNu(a)) = SNi(Mg(μ(x): xêa)). Først vises inklusjonen mot høyre: Anta for vilkårlig w at (3) wêμ(SNu(a)). Da følger wês(SNu(a)) og ved hjelp av definisjonen av "SNu(a)" har vi da

True(w,r) & U(r) & (Ay)((yêU & s(y)= (SN(Mg(s(x): xêa)) **Ω**I) <–> y=r)

Herav følger, om man instansierer med hensyn på r, at

s(r)= (SN(Mg(s(x): xêa)) **Ω**I)

Da følger siden True(w,r) at (4) wê(SN(Mg(s(x): xêa)) **Ω**I) og derfor at wêI & (Ay)(yêa –> wês(y)). Siden a Inkl U & (Ax)(xêU –> s(x)=μ(x)) følger da at wêI & (Ay)(yêa –> wê μ(y)). Vi må videre ha at s(x) Inkl I for alle xêa og derfor at Mg(s(x): xêa) ê Pt(Pt(I)). Det følger da at:

SN(Mg(s(x): xêa)) = SNi(Mg(s(x):xêa)) = SNi(Mg(μ(x): xêa))

Fra dette og (4) følger så: wêSNi(Mg(μ(x):xêa)) som er det vi ønsker.

La oss dernest vise inklusjonen mot venstre i (2). Anta for vilkårlig w at (5) wêSNi(Mg(μ(x): xêa)). Fra definisjonen av SNi følger herav:

(6) (Ax)(xêa –> wêμ(x)) siden Mg(μ(x): xêa)êPt(Pt(I)). Det vil være tilstrekkelig å bevise True(w,SNu(a)) siden det fra (5) følger at (7) wêI. For vi vil da ha at wês(SNu(a)) = μ(SNu(a)). For å vise at True(w,SNu(a)) er det i sin tur tilstrekkelig å bevise i lys av definisjonen av operasjonen SNu:

(8) (Er)(True(w,r) & U(r) & (Ay)((yêU & s(y)=SN(Mg(s(x): xêa))ΩI) <–> y=r)

Fra (6) følger (Ax)(xêa –> wês(x)) siden a Inkl U. Fra dette og (7) slutter vi at wê(SN(Mg(s(x):xêa))Ω I). Siden I er en mengde i lys av U1 har vi også at SN(Mg(s(x):xêa))Ω I er en mengde ved hjelp av utsondringsaksiomet. Det finnes derfor z slik at (9) z= (SN(Mg(s(x):xêa))ΩI) & z Inkl I. I lys av fullstendig-hetsaksiomet for utsagn, U4, følger da eksistensen av r slik at

(10) U(r) & s(r)=z & True(w,r)

I lys av identitetsaksiomet for utsagn må imidlertid denne r være entydig bestemt. Fra (9) og (10) følger derfor (8) som er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 3. **Q.E.D**.

Det er svært nærliggende i lys av dette teoremet å stille spørsmålet om hvordan T;1 er relatert til Boolske algebraer. Hvis en Boolsk algebra defineres som i Appendix A ser man lett at strukturen <U,K,Neg> er en Boolsk algebra. Man kan også lett vise at denne algebraen er atomisk og komplett i den betydning som er forklart i Stoll [1], Ch 6. På den annen side kan man ikke si at strukturen til teorien T;1 direkte avspeiler strukturen i noen Boolsk algebra. Imidlertid er det mulig å peke på noen klare sammenhenger mellom Boolske algebraer og noen generelle mengdeteoretiske strukturer som er klart relatert til T;1. Med en T;1-algebra forstår vi et triple <X,r,Y> der komponentene oppfyller de følgende krav: (i) X er en ikke-tom mengde der Ca(X)≥Aleph;0.

(ii) Y er en ikke-tom mengde og r er en relasjon der r Inkl Prod(X,Y).

(iii) (Ax)(Ay)(x,yêY –> (x=y <–>
Mg(z: zêX & <z,x>êr) = Mg(z: zêX & <z,y>êr)))

(iv) (Aa)(aêPt(X) –> (Ey)(yêY & (Ax)(xêX–>(<x,y>êr <–> xêa))))

Man ser at kravene (i) til (iv) i denne definisjonen av en T;1-algebra er helt analoge med aksiomene U1 – U4. Det er også lett at man kan vise at strukturen <I,True,U> er en T;1-algebra. Med den naturlige Boolske algebra over en ikke-tom mengde X forstår vi den Boolske algebra <Pt(X),Sn;X,c;X> hvor Sn;X og c;X er de vanlige snitt- og komplementerings-operasjoner over mengden X. Er <X,r,Y> en T;1-algebra er den assosierte Boolske algebra til denne strukturen den naturlige Boolske algebra over X. Og omvendt, er X en vilkårlig ikke-tom mengde så er den assosierte T;1-algebraen til den naturlige Boolske algebra over X strukturen <X,r;1,Pt(X)> der r;1= Mg(<x,y>: xêX & yêPt(X) & xêy). Man ser lett at denne strukturen er en T;1-algebra. Det man nå kan vise er at hvis B er en vilkårlig Boolsk algebra som er uendelig, atomisk og komplett (Se Stoll[1]) så er den alltid isomorf med en naturlig Boolsk algebra over en mengde X som er uendelig. Det omvendte gjelder også. Siden naturlige Boolske algebraer over uendelige områder X er, som antydet ovenfor, i en naturlig en-entydig korrespondanse med T;1-algebraer kan derfor T;1-algebraer brukes til å representere uendelige, komplette og atomiske Boolske algebraer og omvendt. Når det gjelder flere og mer utførlige kommentarer om dette emnet henvises leseren til Appendix A.

I dette arbeid vil det ikke bli gjort noe forsøk på å relatere teorien T;1 til det algebraiske studium av modale utsagnslogikker. Når det gjelder dette tema henviser vi leseren til kapittel 17 i Hughes & Cresswell [1] hvor temaet tas opp til nærmere behandling.

I lys av isomorfiteoremet ser man at det er en fullstendig strukturlikhet mellom utsagn og mengder av mulige verdener. Dette innbærer at mengder av mulige verdener i en viss forstand kan representere utsagn. Hvorfor skal man da ikke gå et steg videre og identifisere utsagn med mengder av mulige verdener?[12] Svaret er at man selvfølgelig kan gjøre dette, i alle fall om man bare krever en teori om utsagn der utsagn er mulige mengder av mulige verdener, som videre er konsistent om T;1 er det og som dessuten impliserer alle de teoremene som kan utledes i T;1. La oss formulere presist en slik teori.

Vi betrakter de følgende formler i L;e[Δ;0], nemlig:

U1 M(I) & Ca(I)≥ Aleph;0
U3 True(w,x) –> (wêI & xêU)
U5 U(x) <–> (xêPt(I) & M(x))
U6 U(x) &wêI –> (True(w,x) <–> wêx)

Formelmengden som inneholder nøyaktig lukningene av U1, U3, U5 og U6 kaller vi ∏;1. Teorien vi får når ZFCu(L;e[Δ;0]) utvides med formlene i ∏;1 som nye ikke-logiske aksiomer kaller vi for T;1+. Man ser forøvrig at T;1+ er som T;1 bortsett fra at identitetsaksiomet for utsagn og fullstendighetsaksiomet for utsagn, hhv. U2 og U4 nå er erstattet med U5 og U6. U5 sier at en entitet er et utsagn hvis og bare hvis entiteten er en mengde med mulige verdener. U6 uttrykker at hvis x er et utsagn og w er en mulig verden så er w en mulig verden hvor utsagnet x er sant hvis og bare hvis w er et element i mengden x.

Vi skal i det følgende kommentere enkelte sider ved forholdet mellom de to teoriene T;1 og T;1+. Først bemerker vi at alle teoremer i teorien T;1 også er teoremer i teorien T;1+. Mao. er teorien T;1+ deduktivt sett minst like sterk som teorien T;1. Det følgende teorem uttrykker dette:

Teorem 4: Th(T;1) Inkl Th(T;1+)

Bevis: Siden de to teoriene har alle de logiske og mengdeteoretiske aksiomene felles, samt felles språk og slutningsregler, er det tilstrekkelig å vise at aksiomene U2 og U4 kan utledes i T;1+.

Vi ser først på U2. Anta (1) U(x) & U(y) og anta at
(2) (Aw)(wêI –> (True(w,x) <–> True(w,y))
Det vil være tilstrekkelig å vise at x=y. Fra (2) og U6 følger:
(Aw)(wêI –>(wêx <–> wêy)). Fra (1) og U5 følger at x,y Inkl I. Fra disse to ting følger at (Aw)(wêx <–> wêy). Siden vi også fra (1) og U5 har M(x) & M(y) følger i lys av ekstensjonalitetsaksiomet i ZFCu at x=y.

---

[12] Dette er naturligvis en svært nærliggende ide. Ideen forklares i Cresswell [1] side 23 – 24, videre i Prawitz [1], §4 hvor en sammenheng med Carnaps tilstandsbeskrivelser blir påpekt. Man finner den igjen i arbeidene til svært mange modallogikere. Den tidligste helt klare formuleringen av ideen som vi har vært i stand til å finne er i Kripke [1], §5.2, side 92 – 93.

La oss dernest ta for oss U4. Anta M(x) & x Inkl I. Da følger fra U5 at
(3) U(x) Dessuten har vi i lys av U6 at (4) (Aw)(wêI –>(True(w,x) <–> wêx). Men fra (3) og (4), U3 og det faktum at x Inkl I følger at:

(Ez)(U(z) & (Aw)(True(w,z) <–> wêx)).

Dette er nøyaktig det vi ønsker. Dette avslutter beviset for teoremet. **Q.E.D**.

Etter at vi nå har sett at T;1+ er deduktivt sett minst like sterk som T;1 vil vi ta opp spørsmålet om motsigelsesfriheten til teoren T;1+. Vi vil først vise at *T;1+ er konsistent hvis og bare hvis det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L;e) er konsistent*. Imidlertid er det nødvendig å innføre endel teknisk pregede begreps-dannelser før det er mulig å føre et stringent bevis for denne påstand.

§4.1 Intepretasjoner og konsistensresultater.

La L;1 og L;2 være to første-ordens språk. Med en intepretasjon av L;1 inn i L;2 forstår vi en rekursiv funksjon ∂ som avbilder Fm(L;1) inn i Fm(L;2). Med en intepretasjon av L;1 inn i L;2 som er normal med hensyn på de logiske konstruksjonene forstår vi en intepretasjon ∂ som oppfyller de følgende krav:

(i) Er A,BêFm(L;1) så har vi:
- (a) ∂(¬A) = ¬∂(A)
- (b) ∂(A&B) = ∂(A)&∂(B)
- (c) ∂(AvB) = ∂(A) v ∂(B)
- (d) ∂(A –> B) = ∂(A) –> ∂(B)
- (e) ∂(A <–>B) = ∂(A) <–> ∂(B)

(ii) Er AêFm(L;1) og x,y to vilkårlige variabeltegn i L;1 skal det følgende gjelde:
- (a) ∂((Ax)A) = (Ax) ∂(A)
- (b) ∂((Ex)A) = (Ex)∂(A)
- (c) ∂(x=y) = (x=y)

(iii) Til ethvert n-ært predikat P i L;1 er assosiert en formel F;P i L;2 som inneholder x;1,..,x;n som distinkte fri variabler og hvor disse er de eneste fri variablene som forekommer. Er y;1,...,y;n en sekvens av variabeltegn krever vi at ∂(P(y;1,...,y;n)) er resultatet av å sette inn variabelene y;1,...,y;n for x;1,...,x;n i F;P. Er y;1,...,y;n en sekvens av variabeltegn av lengde n er det da to muligheter: Variabeltegnene y;1,..,y;n kan settes inn for henholdsvis x;1,..,x;n i F;P uten at noen av variablene y;1,...,y;n kommer innenfor området til variabeltegn som er bundet i F;P. I så fall lar vi ∂(P(y;1,...,y;n)) være F;P[x;1,...,x;n](y;1,...,y;n). Dette er ikke tilfelle. I så fall velger vi den første alfabetiske varianten av F;P, la oss kalle den F';P, der vi kan sette inn y;1,...,y;n for x;1,...,x;n, og setter

∂(P(y;1,...,y;n)) = F';P[x;1,....,x;n](y;1,...,y;n).

Anta nå at L;1 og L;2 er to språk som inneholder de mengdeteoretiske predikatene. En intepretasjon av L;1 inn i L;2 som er normal med hensyn på de mengdeteoretiske konstruksjonene er da en intepretasjon ∂ av L;1 inn i L;2 som oppfyller de følgende to krav:

(i) Er x et vilkårlig variabeltegn i L;1 gjelder:
- (a) ∂(M(x)) = M(x)

(ii) Er x,y to vilkårlige variabeltegn i L;1 gjelder:
(b) ∂(xêy) = (xêy)

Vi har nå innført de begrepene vi trenger. Den følgende hjelpesetningen er av en temmelig triviell natur:

Lemma 1: Anta L;1 og L;2 er to første-ordens språk og ∂ er en intepretasjon av L;1 inn i L;2 som er normal med hensyn på de logiske konstruksjonene. Da gjelder for alle Aê Fm(L;1) at:
(a) AêLAx(L;1) –> ∂(A)êQ;(L;2)
(b) AêQ;(L;1) –> ∂(A)êQ;(L;2)

Beviset for denne sats er i det vesentlige så enkelt at det kan overlates til leseren som en øvelse. Vi bemerker kun at om L er et første-ordens språk så betegner Q;L den minste formelmengden i L som inneholder alle de logiske aksiomene i L og som dessuten er lukket under slutningsreglene modus ponens og universell generalisering. Punkt (b) i hjelpesetningen ovenfor bevises da ved induksjon på denne mengden Q;L som er klassen av alle de kvantifikasjonsteoretiske teoremene i L.

Merk at hvis L;1 er et første-ordens språk med endelig mange predikatkonstruksjoner og L;2 er det samme så er en intepretasjon ∂ av L;1 inn i L;2 entydig bestemt om ∂(P(x;1,...,x;n)) er bestemt for alle n-ære ikke-logiske predikater i P i L;1 (n≥1) og ∂ er normal med hensyn på de logiske konstruksjonene.

Det følgende teorem er viktig:

Teorem 5: La ∂ være en intepretasjon av L;e[Δ;0] inn i L;e som er normal med hensyn på de logiske såvel som de mengdeteoretiske konstruksjonene og som dessuten oppfyller de følgende krav:
(i) ∂(MV(x)) = (xêNat)
(ii) ∂(U(x)) = (xê Pt(Nat))
(ii) ∂(True(w,x)) = (wêNat & xê Pt(Nat) & wêx)
Da gjelder:
(a) AêFm(L;e) –> (∂(A)êFm(L;e) & ∂(A)=A
(b) AêTh(T;1+) –> ∂(A) ê Th(ZFCu(L;e))
(c) AêTh(T;1) –> ∂(A) êTh(ZFCu(L;e))
(d) AêFm(L;e) –> (AêTh(ZFCu(L;e) <–> AêTh(T;1+))
(e) AêFm(L;e) –> (AêTh(ZFCu(L;e) <–> AêTh(T;1))

Beviset for dette teoremet er temmelig enkelt, men før det gis og for at leseren ikke skal bli distrahert med tekniske detaljer, nevnes enkelte viktige konsekvenser av det. Teorem 4 sier Th(T;1) Inkl Th(T;1+). Nå er det slik at systemet ZFCu(L;e) er inkludert i T;1 siden T;1 er en utvidelse av ZFCu(L;e) ved at språket L;e er utvidet til L;e[Δ;0] og ved at formlene i ∏;0 er lagt til som nye ikke-logiske aksiomer. Det følger at man har:
(1) Th(ZFCu(L;e)) Inkl Th(T;1) Inkl Th(T;1+)
Antar man nå at T;1+ er konsistent , dvs. at ¬((B&¬B)êTh(T;1+) for enhver formel B følger umiddelbart fra (1) at T;1 såvel som ZFCu(L;e) er konsistente. Antar man på den annen side at T;1+ er *inkonsistent* mao. at det finns en formel BêFm(L;e[Δ;0]) slik at (B&¬B)êTh(T;1+) ser man fra Teorem 5, punkt (b) at:
∂(B&¬B) = ∂(B) & ¬∂(B) ê Th(ZFCu(L;e)).
Fra dette følger at ZFCu(L;e) i så tilfelle er inkonsistent. Tilsvarende ser man ved hjelp av Teorem 5 punkt (c) at hvis T;1 er inkonsistent så er ZFCu(L;e) inkonsistent. Fra disse

overveielsene følger at T;1 og T,1+ er ekvikonsistente med ZFCu(L;e). Dette formuleres som et eget teorem slik:

Teorem 6:(a) T;1 er konsistent hvis og bare hvis ZFCu(L(;e)) er konsistent.
(b) T;1+ er konsistent hvis og bare hvis ZFCu(L(;e)) er konsistent.

Betydningen til dette teorem bør naturligvis ikke overdrives, men teoremet kan sises å vise at man ikke på et rent logisk grunnlag kan forkaste T;1 og T,1+ hvis man aksepterer de mengdeteoretiske prinsippene i ZFCu(L;e). At disse mengdeteoretiske prinsippene er akseptable støttes av det faktum at ZFCu(L;e) er konsistent om ZFC er det. Ved ganske enkelt å tolke "xêy" som "xêy" og "M(x)" som "x=x" er det nemlig lett å se at såvel de logiske, som de mengdeteoretiske, aksiomene i ZFCu(L;e) går over til toremer i ZFC og at tolkningen omformer alle bevis i ZFCu(L;e) til bevis i ZFC. Et bevis for en motsigelse i ZFCu(L;e) kan derfor lett omformes til et bevis for en motsaigelse i ZFC. Siden det er velkjent at ZFC er konsistent relativt til ZF i lys av Gødels klassiske konsistensresultater, følger det at ZFCu(L;e) er konsistent relativt til ZF. I lys av Teorem 6 er derfor T;1 og T;1+ også konsistente relativt til denne teori. Dette styrker ytterligere den påstand at man ikke på et rent logisk grunnlag kan forkaste T;1 og T;1+.

Det kan være av interesse å betrakte ytterligere noen følgesetninger til Teorem 5. La L;1 og L;2 være to første-ordens språk og anta at L;2 er en utvidelse av L;1 med nye ikke-logiske predikater. Anta T;1' er en første-ordens teori i L;1 og T;2' er en første-ordens teori i L,2 og at Th(T;1') Inkl Th(T;2'). Da sies T;2' å være en konservativ utvidelse av T;1' hvis og bare hvis enhver formel i L;1 som er et teorem i T;2' allerede er et teorem i T;1'. Fra punkt (d) og (e) i Teorem 5 ser man at såvel T;1 som T;1+ er konservative utvidelser av ZFCu(L;e) i denne forstand. Denne setningen oppføres som et eget teorem:

Teorem 7:(a) T;1er en konservativ utvidelse av ZFCu(L(;e)) (b)
T;1+ er en konservativ utvidelse av ZFCu(L(;e))

Dette teorem er også av en viss interesse siden det viser at ved å utvide ZFCu(L;e) til T;1, eventuelt T;1+; utvider vi ikke teorien med nye rent mengdeteoretiske prinsipper. Våre teorier gir en derfor ikke noe nytt fra en rent mengdeteoretisk synsvinkel.

La oss nå gi beviset for Teorem 5:

Bevis for Teorem 5: Ad (a). Dette bevises ved induksjon på lengden av formler i L;e. Er P en predikatkonstruksjon i L;e er P enten "x=y", "M(x)" eller "xêy". Men i disse tilfellene holder satsen fordi ∂ er en intepretasjon av L;e inn i L;e som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene. Antar man at A,B êFm(L;e) og at x er en variabel og at påstanden holder for A og B er det også lett å se at den holder for ¬A, A&B, A–>B, A<–>B, (Ex)A og (Ax)A fordi ∂ er normal med hensyn til de logiske konstruksjonene. Dette viser at påstanden holder.

Ad (b). Denne påstanden bevises ved induksjon på mengen av teoremer i T;1+. Er A et logisk aksiom ser man fra Lemma 1 at ∂(A) er et predikatlogisk teorem i L;e og at satsen derfor holder. Er A et mengdeteoretisk aksiom bortsett fra et utsondrings aksiom eller en instans av replacement-aksiomet ser man at AêFm(L;e) og derfor at ∂(A)=A. Det følger da at A er et mengdeteoretisk aksiom i ZFCu(L;e). Er imidlertid A enten en instans av utsondringsaksiomet eller replacementaksiomet ser man likevel utfra normaliteten til ∂ at ∂(A) også er ekvivalent med en instans av utsondringsaksiomet eller replacementaksiomet i L;e og derfor et teorem i ZFCu(L;e). Holder påstanden for A og A–>B ser man lett at den holder for B og (Ax)A siden ∂ er normal med hensyn på de mengdeteoretiske konstruksjonene og Th(ZFCu(L;e)) er lukket under slutningsreglene modus ponens og universell generalisering. Det gjenstår derfor bare å vise at ∂(A)êTh(ZFCu(L;e)) om A er en av formlene i ∏;1, dvs. en av formlene U1, U3, U5 eller U6. Å vise dette skulle imidlertid være såpass enkelt at det kan overlates til leseren. Her skal bare et tilfelle studeres, nemlig det tilfelle hvor A=U1. Skrives U1 i primitiv notasjon bortsett fra uttrykket "Ca(x)≥Aleph;0" får man:

A= (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx <–> MV(y)) & Ca(x)≥Aleph;0)

Her forkorter "Ca(x)≥Aleph;0" en formel i L;e. I lys av intepretasjonen ∂ og punkt (a) som er bevist ovenfor har man derfor at :

∂(A) = (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx <–> yêNat) & Ca(x)≥Aleph;0)

∂(A) uttrykker imidlertid intet annet enn at Nat, mengden av de naturlige tall, er en mengde og at den er minst tellbart uendelig. Dette er det imidlertid lett å vise at er tilfelle i ZFCu(L;e). Dette avslutter beviset for punkt (b).

Ad (c). Dette bevises på en måte som er helt analog med den som ble vist under punkt (b). Det vil være tilstrekkelig å bevise at ∂(A) er et teorem i ZFCu(L;e) om A enten er U1, U2, U3 eller U4. Tilfellene hvor A= U1, U3 eller U4 overlates til leseren. Anta A=U2. Dette innebærer at

A= (Ax)(Ay)(U(x) &U(y) –>
(x=y <–> (Aw)(MV(w) –> (True(w,x) <–> True(w,y)))))

I lys av definisjonen følger at ∂(A) er den følgende formel i L;e:

(Ax)(Ay)(xêPt(Nat) & yêPt(Nat) –> (x=y <–>
(Aw)(wêNat –>((wêNat &xêPt(Nat) & wêx) <–>
(wêNat &yêPt(Nat) & yêx)))))

Man ser lett at denne formelen er bevisbart ekvivalent i ZFCu(L;e) med den følgende formel:

(Ax)(Ay)(M(x)&M(y) & x,y Inkl Nat. –>
(x=y <–> (Aw)(wêNat –>(wêx <–> wêy))))

Men at dette er et teorem i ZFCu(L;e) følger lett ved hjelp av ekstensjonalitets-aksiomet i denne teori. Dette avslutter beviset for punkt (c).

Ad (d) Dette følger umiddelbart fra det faktum at
Th(ZFCu(L;e)) Inkl Th(T;1+)
samt punktene (a) og (b) som er bevist ovenfor.

Ad (e) Dette følger umiddelbart fra punktene (a) og (c) som vi har gitt bevis for ovenfor samt det faktum at Th(ZFCu(L;e)) Inkl Th(T;1). Dette avslutter dermed beviset for Teorem 5. **Q.E.D**.

Vi har nå vist at T;1+ er deduktivt sett minst like sterk som T;1 og at begge teoriene er konsistente relativt til ZFCu(L;e). I tillegg har det blitt bevist at de er konservative utvidelser av dette mengdeteoretiske systemet. Man kan imidlertid spørre om T;1+ er deduktivt sett sterkere enn T;1 og ikke bare minst like sterk. Mao. man kan stille spørsmålet om man har Th(T;1) SInkl Th(T;1+) eller ikke. Siden dette åpenbart impliserer at teorien T;1 er konsistent og derfor at ZF er konsistent kan denne påstanden ikke bevises i ZF. La nå u;1 være den formelen i L;e som sier at det finnes nøyaktig en entitet som er en ikke-mengde. Man har altså at u;1 = (Ey)((¬M(y)) & (Ax)((¬M(x)) –> x=y)). La videre S være det mengdeteoretiske system som oppnås når ZFCu(L;e) utvides med u;1 som nytt ikke-logisk aksiom. Da kan man vise at følgende teorem holder:

Teorem 8:Er S en konsistent første-ordens teori så gjelder:

Th(T;1) SInkl Th(T;1+)

En rekke kommentarer er på sin plass i forbindelse med denne satsen. For det første må man holde fra hverandre spørsmålet om S er et rimelig system og spørsmålet om S er konsistent, dvs. motsigelsesfritt. Det siste spørsmålet kan muligens besvares bekreftende, i alle fall har vi ikke på det nåværende tidspunkt funnet noen avgjørende argumenter mot denne påstand. Det første spørsmål må trolig besvares benektende. Det er neppe særlig rimelig å hevde at det bare skulle finnes ett urindivid eller bare et endelig antall. Finnes det urindivider synes det snarere mer plausibelt å anta at det skulle eksistere uendelig mange av dem. I så tilfelle kan ikke u;1 regnes som et plausibelt aksiom og a forteriori må S regnes som et heller urimelig system siden u;1 inngår som et ikke-logisk aksiom i det. Man kan nå spørre om S, dvs. ZFCu(L;e) utvidet med u;1 er konsistent om ZFCu(L;e) er det. Ved det nuværende tidspunkt kan dette ikke anses som avgjort og det vil heller ikke bli gjort noe forsøk på å avgjøre dette her.[13] Men det er neppe spesielt dristig å gjette på at man kan vise at systemet S er konsistent relativt til et eller annet velkjent og fornuftig mengdeteoretisk system.

Beviset for Teorem 8 vil bli skissert, men siden det er temmelig langt om det gjennomføres detaljert og det dessuten ikke er spesielt vanskelig skal vi her bare gjennomgå de viktigste punktene i det.

Først kan det bemerkes at vi i dette skrift bruker "Ur" for å betegne mengden av urindivider, dvs. mengden av alle entiteter som ikke er mengder. Den følgende definisjon gis av denne betegnelsen:

Definisjon 4: Ur = Mg(x : ¬(M(x)))

Bokstaven "C" brukes dessuten på de følgende sider som et navn på formelen "(Ex)(Ut(x) & ¬M(x))". Vi skal nå gi et bevis for den følgende setning:

Teorem 9: Er første-ordens teorien T;1[C] konsistent har vi at det følgende holder:
¬[(¬C)êTh(T;1)] & (¬C)êTh(T;1+)

Bevis: Aksiomet U5, dvs. formelen (1) (Ax)(Ut(x) <–> (xêPt(I) & M(x))) er et ikke-logisk aksiom i T;1+. Fra (1) følger (2) (Ax)(Ut(x) –> M(x)). Men herav kan man slutte: (3) ¬(Ex)(Ut(x) &¬M(x)) mao. at ¬C. Dette viser at ¬C er et teorem i T;1+ dvs. (4) (¬C)êTh(T;1+). Anta T;1[C], dvs. teorien T;1 utvidet med C som et nytt ikke-logisk aksiom er konsistent og anta for reduktio ad absurdum at (¬C)êTh(T;1). Siden Th(T;1) Inkl Th(T;1[C]) har vi da at (¬C)êTh(T;1[C]). Trivielt gjelder: CêTh(T;1[C]). Det følger at: ((¬C)&C)êTh(T;1[C]), dvs. at T;1[C] er inkonsistent. Dette strider imidlertid mot forutsetningen i teoremet. Herav: ¬[(¬C)êTh(T;1)]. Fra dette og (4) følger satsen. **Q.E.D**.

Fra Teorem 4 og Teorem 10 følger så umiddelbart:

Teorem 10: Er første-ordens teorien T;1[C] konsistent har vi at det følgende holder:
Th(T;1) SInkl Th(T;1+)

Bevis: Dette er opplagt i lys av hva de nevnte teoremer sier. **Q.E.D**.

---

[13] I Rognes [5] blir det bevist at systemet S;1, dvs. ZFCu(L;e) utvidet med u;1 er konsistent om ZFC utvidet med aksiomet om at det finnes utilgjengelige kardinaltall er konsistent. Formodentlig kan man også vise at S;1 er konsistent relativt til ZFC.

Det skulle nå være forholdsvis lett å se at Teorem 8 følger fra Teorem 10 og den følgende setning:

Teorem 11: Er S konsistent så er T;1[C] konsistent.

For å vise denne satsen er det nok å vise den følgende sats som er et intepreta-sjonsteorem av samme type som Teorem 5.

Teorem 12: La ∂ være en intepretasjon av L;e[Δ;0] inn i L;e som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som i tillegg er bestemt ved:

(i) ∂(Ut(x)) = (xê(Ur U (Pt(Nat)-{ø}))
(ii) ∂(True(w,x)) = (wêN & xê(Pt(Nat) - {ø} & wêx)
(iii) ∂(MV(x)) = (xêNat)

Da gjelder:

(a) (Aa)(aêFm(L;e) –> ∂(a)êFm(L;e) & ∂(a)=a)
(b) (Aa)(aêTh(T;1[C] .–> ∂(a) êTh(S))

Et bevis for denne sats vil straks bli gitt, men først kan det være av interesse å se på hvordan Teorem 11 følger fra denne satsen. Anta for reduktio ad absurdum at T;1[C] er inkonsistent. Da finnes det b slik at

bêFm(L;e[Δ;0]) & (b&¬b)êTh(T;1[C])

Fra Teorem 12, punkt (b), følger da ∂(b&¬b)êTh(S). Men siden ∂ er normal med hensyn på de logiske konstruksjonene har man at (∂(b) & ¬∂(b))êTh(s). Det følger i så fall at S er inkonsistent siden ∂(b)êFm(L;e). Dette viser at Teorem 11 holder om Teorem 12 holder. Man kan følgelig anse Teorem 8 - Teorem 12 for etablert om man kan gi et bevis for Teorem 11. La oss gjøre det:

Bevis for Teorem 12: Ad (a). Dette bevises på nøyaktig samme måte som punkt (a) i Teorem 5, dvs. ved induksjon på lengden av formler i L;e.

Ad (b). Dette bevises ved induksjon på mengden av teoremer i T;1[C]. Når det gjelder de logiske og mengdeteoretiske aksiomene i T;1[C] ser man lett at ∂, slik den er definert, transformerer disse til logiske og mengdeteoretiske aksiomer i S. Videre skulle det være enkelt å innse at hvis påstanden holder for a og a–>b, og x er et vilkårlig variabeltegn, så holder satsen også for b og (Ax)a siden Th(S) er lukket under modus ponens og universell generalisering. Det er derfor tilstrekkelig å vise at satsen holder om a enten er en av formlene U1 - U4 eller om a er formelen C. Det blir altså fem tilfelle som må undersøkes i detalj. Det er imidlertid lett å verifisere at ∂(C) er et teorem i S=ZFCu(L,e)[u;1]. Dette er det også uproblematisk å verifisere i det tilfellet at a er U1 eller U3. Disse tilfellene overlates derfor til leseren. Derimot vil vi gi et detaljert bevis i de to resterende tilfelle.

(I) Det er nødvendig å bevise at ∂(U2)êTh(S). Man har at U2 er den følgende formel:
(Ax)(Ay)(Ut(x) & Ut(y) –>
(x=y <–> (Aw)(MV(w) –>(True(w,x) <–> True(w,y)))))

I lys av dette har man at ved hjelp av definisjonen av ∂ at ∂(U2) er den følgende formel i L;e, nemlig:

(1) (Ax)(Ay)(x,yê(Ur U (Pt(Nat)-{ø})) -> (x=y <–>
(Aw)(wêNat –> ((wêNat & xê(Pt(Nat)-{ø}) & wêx)
<–>(wêNat & xê(Pt(Nat)-{ø}) & wêy))))

Det er altså tilstrekkelig å vise at (1) er et teorem i S. Nå ser man imidlertid lett på grunnlag av enkle predikatlogiske prinsipper at (1) er ekvivalent med:

(2) (Ax)(Ay)(x,yê(Ur U (Pt(Nat)-{ø})) &
(Aw)(wêNat –> ((xê(Pt(Nat)-{ø}) & wêx)
<–>(xê(Pt(Nat)-{ø}) & wêy))). –> x=y)

For å vise at (2) er et teorem i S anta for vilkårlige x og y at:

(3) x,yê(Ur U (Pt(Nat)-{ø}))

(4) (Aw)(wêNat –> ((xê(Pt(Nat)-{ø}) & wêx)
<–>(xê(Pt(Nat)-{ø}) & wêy)))

med det før øye å vise at x=y. I lys av tre må det sondres mellom fire tilfelle: *Tilfelle (i)*: x,yêUr. Siden u;1 er et aksiom i S følger da at x=y siden mengden av urindivider ifølge u;1 bare inneholder ett element. *Tilfelle (ii)*: xêUr & yêPt(Nat)-{ø}. I så tilfelle finnes z der zêy og hvor zêNat. I lys av (4) har man da at zêx. Herav har vi fra mengdeaksiomet (Az)(zêx -> M(x)) i ZFCu(L;e) at M(x). Men xêUr og derfor ¬M(x). Dette gir en en motsigelse og viser derfor at dette tilfellet er utelukket. *Tilfelle (iii)*: xêPt(Nat)–{ø} og yêUr. Dette tilfellet er helt analogt med det foregående og overlates til leseren. *Tilfelle (iv)*: x,yêPt(Nat)–{ø}. Anta for vilkårlig w at wêx. Da har man siden x Inkl Nat at wêNat. Det følger da ved hjelp av (4) at wêy. Tilsvarende kan man vise for vilkårlig w at hvis wêy så er også wêx. Man har derfor at (Aw)(wêx <–> wêy). Siden x,yêPt(Nat) og man har at Pt(Nat)= Mg(x: M(x) & x Inkl Nat) følger M(x) & M(y). Ved hjelp av ekstensjonalitetsaksiomet som inngår i systemet S følger da x=y. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at ∂(U2)êTh(S).

(II) Vi har at U4 er den følgende formel:

(Ax)((M(x) & (Ay)(yêx –> yêI).–> (Ez)(Ut(z) & (Aw)(True(w,z) <–> wêx)))

Ved hjelp av definisjonen av ∂ ser man lett at ∂(U4) er den følgende formel i L;e:

(1) (Ax)((M(x) & (Ay)(yêx –> yêNat)) –>
(Ez)(zê(UrU(Pt(Nat)-{ø})) &
(Aw)((wêNat &zêPt(Nat) &wêz) <–> wêx)))

Det er altså nødvendig å vise at (1) er et teorem i S. Anta derfor for vilkårlig x at (2) M(x) & (Ay)(yêx –> yêNat) dvs. M(x) & x Inkl Nat. Det er da to muligheter: (a) x=ø. Siden u;1 er et aksiom i S følger eksistensen av z der (2) zêUr og derfor at zê(UrU(Pt(Nat)-{ø})). Men det er trivielt sant, om zêUr & x=ø, at man har:

(Aw)((wêNat & zê(Pt(Nat)-{ø}) & wêz) <–> wêx) Påstanden holder derfor i dette tilfellet. (b) x≠ø. Da har man i lys av (2) at xêPt(Nat)-{ø}. Anta for vilkårlig w at wêx. Da har man selvfølgelig at wêx & xêPt(Nat)-{ø} & wêNat. Det omvendte holder helt trivielt. Det følger altså at :

xêUrU(Pt(Nat)-{ø}) & (Aw)((wêx & xêPt(Nat)-{ø} & wêNat) <–> wêx)

Fra dette følger konsekventen i (1) ved eksistensiell generalisering. Dette viser at ∂(U4) er et teorem i S. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 12. **Q.E.D**.

Vi har nå kommentert de sider ved teoriene T;1 og T;1+ som vi primært var interessert i å gå detaljert inn på. Det er imidlertid to andre aspekter ved disse teoriene som etter vår mening krever nærmere omtale og gransking. I neste de neste paragrafer skal vi komme nærmere inn på dette.

§4.2 Reduksjon av T;1

Språket til teorien T;1+ er L;e[Δ;0]. Nå er det imidlertid mulig å redusere denne teori til en hvis grunnbegreper – ved siden av de logiske og mengde-teoretiske – utelukkende er begrepet om en mulig verden. Δ;0 inneholdt de tre konstruksjonene "x er en logisk mulig verden ", x er et utsagn" og "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant". La nå Δ;0- betegne den mengden av konstruksjoner man får når man fjerner de to siste av disse konstruksjonene og bare beholder predikatet "x er en mulig verden". L;e[Δ;0-] vil i så fall være språket som fremkommer når L;e utvides med dette predikatet. Av de utsagnsteoretiske aksiomene i T;1+, nemlig U1, U3, U5 og U6, er det bare U1 som er en formel i L;e[Δ;0-]. Lar man T;1++ være den teorien som oppnås når ZFCu(L;e[Δ;0-]) utvides med U1 som eneste nye ikke-logiske aksiom ser man at alle teoremene i T;1+ kan utledes fra dem i T;1++ om man supplerer den sistnevnte teori med de følgende to definisjoner:

D1 Ut(x) <–> xêPt(I)

mao. identifiseres utsagn med mengder av logisk mulige verdener og

D2 True(w,x) <–> (wêI & Ut(x) & wêx)

Det er klart at den nye teorien T;1++ begrepsmessig sett er forskjellig fra T;1+ og derfor strengt tatt ikke bør identifiseres med denne teori. T;1++ er imidlertid sett fra en viss synsvinkel enklere enn teorien T;1+. For det første inneholder T;1++ færre primitive predikater en T;1+. For det andre inneholder den færre aksiomer. Teorien T;1++ er derfor mer begrepsøkonomisk enn teorien T;1+. Siden alle teoremene i T;1 kan utledes fra dem i T;1+ følger det at også teorien T;1 kan reduseres til T;1++ via definisjonene D1 og D2 ovenfor.

§4.3 Noen kritiske bemerkninger. Forholdet mellom T;1 og Kripke-modeller.

Fra betraktningene i §4.2 fremgår det at T1, såvel som T;1+ kan reduseres til teorien T;1++ ved hjelp av definisjonene D1 og D2. Disse to definisjonene kan også brukes for å oversette alle formlene i L;e[Δ;0] til formler i L;e[Δ;0-] og kan derfor sies å representere en reduksjon av det første av disse to språkene til det andre. Det spørsmål som det i denne forbindelse kan være rimelig å ta opp er derfor spørsmålet om i hvilken grad denne reduksjonen kan sies å være dekkende eller adekvat. Ønsker man å drøfte dette nærmere er det naturlig å klargjøre hva man mener med en reduksjon. Med en reduksjon av et første-ordens språk L;1 til et første-ordens språk L;2 skal vi i det følgende forstå det som tidligere ble kalt for en intepretasjon av L;1 inn i L;2. Nå foreligger det ingen allment akseptert teori om når reduksjoner i denne forstand er dekkende, men det virker rimelig å si at et nødvendig vilkår er at den i det minste overfører en stor del av de setninger i L;1 som intuitivt sett virker sanne til setninger i L;2 som intuitivt sett virker sanne. Det må innrømmes at dette kravet er svært vagt og løst formulert. Det må også understrekes at det bare er ment som et nødvendig vilkår. Det kan virke ytterst tvilsom om det også kan være tilstrekkelig. Kaller man reduksjonen beskrevet i §4.2 for ∂ og aksepterer man, i det minste for argumentets skyld, at teoremene i T;1++ er intuitivt sett sanne setninger i L;e[Δ;0] og at teoremene i T;1 utgjør en "stor del" av de setningene i L;e[Δ;0] som intuitivt sett virker sanne oppfyller ∂ det krav som vi har satt til en dekkende reduksjon. Imidlertid kan man her spørre om det faktisk er slik at alle teoremene i T;1 kan regnes som sanne setninger i L;e[Δ;0]. Dette kan ikke sies å være direkte opplagt. For eksempel er det ikke uten videre innlysende at det som tidligere har blitt kalt *Fullstendighetsaksiomet for utsagn* uten videre kan regnes som sant. Hvis det motsatte skulle være tilfelle kan ikke den nevnte reduksjon være dekkende, i alle fall ikke om man stiller det krav at en reduksjon ikke må avbilde usanne setninger på sanne for å være adekvat. Hvis man stiller det sterkere krav til en reduksjon at den avbilder alle sanne setninger utelukkende på sanne setninger og usanne setninger på usanne setninger og regner alle teoremene i T;1++ for sannheter i L;e[Δ;0-] er det ikke opplagt at reduksjonen representert ved definisjonene i §4.2 er dekkende fordi den overfører f. eks. setningen

(Ax)(U(x)–>¬M(x))

til en usannhet i L;e[Δ:0-]. Men det kan ikke uten videre sies at denne setningen er usann. Det er strengt tatt ikke nødvendig på dette punkt å ta noen definitiv stilling til spørsmålet om reduksjonen i forrige paragraf er adekvat eller ikke. Man kan nøye seg med å se på den som en interessant mulighet og bemerke at spørsmålet om dens adekvans avhenger av om alle teoremene i T;1 intuitivt sett er rimelige eller ikke. Dette spørsmål vil i sin tur avhenge av hvorvidt de ikke-logiske aksiomene U1 – U4 i T;1 er rimelige eller ikke. I det følgende vil dette bli nærmere diskutert. Spesielt skal vi diskutere aksiomet U4.

Men før dette gjøres kan det være hensiktsmessig å skyte inn enkelte bemerkninger angående forholdet mellom teorien T;1 og såkalte Kripke-modeller for modallogiske systemer. La L være et vanlig språk for modal utsagnslogikk slik som f.eks. definert i Kripke [1], §1. Med en modellstruktur for L forstår man da et ordnet triple <V,W,R> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) W er en ikke-tom mengde
(ii) R er en relasjon og R Inkl Prod(W,W)
(iv) V er en funksjon som til hver setningsvariabel p;j i L tilordner en delmengde av W

Man legger merke til at denne definisjonen av modellstruktur er rent mengdeteoretisk, dvs. at definiens i definisjonen kan formuleres som en åpen setning i L;e. Er nå A en formel i L og M=<V,W,R> en modellstruktur for L og x et eller annet element i W definerer man hva som menes med at A er sann i M relativt til x ved en standard induktiv definisjon på lengden av formler i L. Man innfører imidlertid ofte i forbindelse med strukturer av denne typen talemåten:

(1) "x er en mulig verden i modellstrukturen M"

og definerer denne talemåten ved å si at hvis M=<V,W,R> er en modellstruktur for L så er x en mulig verden i M hvis og bare hvis xêW.

Det kan da for det første bemerkes at konstruksjonen "x er en mulig verden i M" er forskjellig fra konstruksjonen "x er en mulig verden". Dette er opplagt. Den første konstruksjonen er en binær konstruksjon, den andre er en unær, monadisk konstruksjon. For det andre uttrykker konstruksjonen (1) et rent mengdeteoretisk begrep i det definiens i definisjonen kan formuleres som en åpen setning i L;e, altså reformuleres ved hjelp av rent mengdeteoretiske predikater. Derimot har ikke vi foreslått noen slik rent mengdeteoretisk definisjon av predikatet "x er en mulig verden". For det tredje vil vi peke på at det er urimelig å definere konstruksjonen "x er en mulig verden" ved hjelp av (1) på den følgende måte:

(D) x er en mulig verden hvis og bare hvis det finnes et modallogisk språk L for modal setningslogikk og en modellstruktur M for L og x er en mulig verden i M

Dette er urimelig fordi det da f.eks. vil følge at alle de reelle tall er mulige verdener. La nemlig V;0 være funksjonen som til hver setningsvariabel i L tilordner mengden {0}, la R være mengden av de reelle tall og ≤ være relasjonen mindre eller lik mellom de reelle tall. Da er <V;0,R,≤ > en modellstruktur. Siden hvert element x i R er en mulig verden i denne modellstrukturen om vi forutsetter vår tidligere gitte definisjon av predikatet (1), følger ved hjelp av (D) at alle elementene i R er mulige verdener. På tilsvarende vis kan man vise at enhver matematisk entitet er en mulig verden, f. eks. en sirkel, og under visse rimelige tilleggsantagelser, f.eks. at mengden av grantrær i Norge eksisterer følger det ved hjelp av (D) at ethvert grantre i Norge er en mulig verden. Mao. leder definisjonen (D) til en oppfatning av mulige verdener som strider fullstendig mot hva man skulle vente var rimelige oppfatninger om hva denne type entiteter er. For det fjerde bemerker vi at om vi definerer en naturlig modellstruktur for et modallogisk språk L som en modellstruktur <V,W,R> der W=I så kan man selvfølgelig i T;1 bevise eksistensen av naturlige modelstrukturer i denne forstand. Det generelle modellstrukturbegrep som ble definert ovenfor kan da oppfattes som fremkommet ved en abstrahering av det naturlige modellstrukturbegrep ved at man f. eks. ser bort fra kardinaltallet til mengden av mulige verdener, ser bort fra deres indre struktur og i det hele tatt ser bort fra egenskaper som ikke gjenspeiles i det modallogiske språk L. Forøvrig er Kripke-modeller og beslektede strukturer selvfølgelig et uhyre viktig redskap ved studiet av forskjellige modallogiske systemer. For en introduksjon til dette studium henvises leseren til Hughes & Cresswell [1].

§5 Fullstendighetsaksiomet. Den svakere teorien T;1-

Av de ikke-logiske aksiomene i teorien T;1 som har med utsagn å gjøre, nemlig formlene U1 – U4 er det kanskje særlig U4 som kan fortone seg som noe mindre innlysende enn de øvrige. Av denne grunn kan det være av interesse å undersøke om denne setningen kan utledes fra andre setninger i L;e[Δ;0] som umiddelbart kan sies å være av en mer opplagt karakter. Dette vil nå bli detaljert undersøkt.

Men først skal vi gi en oversikt over innholdet i de følgende paragrafer. Kall den første-ordens teorien man får når setningen U4 og bare denne setningen fjernes fra de ikke-logiske aksiomene i teorien T;1 for T;1– . Enkelte sider ved denne teorien vil først bli kommentert. Dernest vil vi utførlig kommentere den familien av teorier man får når T;1– sukssesivt utvides med visse formler i L;e[Δ;0] som nye ikke-logiske aksiomer. De formlene som vil bli diskutert er eksistensaksiomet for utsagn, negasjonsaksiomet, det uendelige konjunksjons-aksiom, identitetsaksiomet for mulige verdener, separabilitetsaksiomet, det ende-lige konjunksjonsaksiom og tilslutt finitiserbarhetsaksiomet. Vi vil vise at den teorien man får når T;1– utvides med alle disse setningene som nye ikke-logiske aksiomer er deduktivt ekvivalent med T;1. Endelig vil rimeligheten av U4 bli diskutert i lys av dette resultat og en rekke relaterte resultater.

§5.1 Utvidelser av teorien T;1-. Aksiomene U7 - U14.

Hvis man betrakter teorien T;1– som ble beskrevet rett ovenfor finner man nokså fort ut at denne teorien er meget svak. Siden setningene U2 og U3 – som inngår som ikke-logiske aksiomer i den – blir tomt sanne om man antar at mengden av utsagn er tom og antar at relasjonen True er identisk med null-relasjonen ser man at teorien T;1– er logisk sett forenelig med den antagelse at det ikke finnes utsagn i det hele tatt. At det for hver mulig verden skulle eksistere et utsagn som er sant i denne verden w virker svært rimelig. Vi kaller denne påstanden for *Eksistensaksiomet for utsagn* og formaliserer den slik:

(U7) (Aw)(wêI –> (Ex)(Ut(x) & True(w,x)))

Det er naturlig å betrakte muligheten av å legge U7 til teorien T;1- som et nytt ikke-logisk aksiom. Ser man imidlertid nærmere på teorien T;1– utvidet med U7 ser man at utvidelsen fremdeles er meget svak. Den garanterer f.eks. ikke at det til ethvert utsagn x finnes et annet utsagn, negasjonen av x, som er sant i nøyak-tig de og bare de verdener hvor x er usant. Denne påstand, *Negasjonsaksiomet for utsagn* , formuleres slik:

(U8) (Ax)(Ut(x) –> (Ey)(Ut(y) &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,y) <–> ¬(True(w,x)))))

Men selv om man er garantert at det for enhver mulig verden w finnes et utsagn som er sant i denne verden og dessuten garantert at negasjonen av ethvert utsagn eksisterer følger ikke at konjunksjonen av to utsagn x og y alltid eksisterer. Man har heller ikke noen mulighet for å vise at den følgende sterkere påstand holder, nemlig at dersom a er en vilkårlig mengde med utsagn så finnes det alltid et utsagn som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene hvor alle utsagnene i a er sanne. Denne påstand kan man uten å overdrive si at virker svært rimelig. Man skulle forvente at den skulle kunne utledes i enhver noenlunde fornuftig teori om utsagn. Påstanden vil i det følgende bli kalt for *Det uendelige konjunksjonsaksiom*. Setningen kan formaliseres slik:

(U9) M(a) & (Ax)(xêa –> Ut(x)) .–> (Ey)(Ut(y) &
(Aw)(MV(w) –>(True(w,y) <–> (Ax)(xêa –> True(w,x)))))

Man kan betrakte den påstand at to mulige verdener er identiske om nøyaktig de samme utsagn er sanne i dem. Til en viss grad kan en slik påstand virke plausibel. Den minner om Leibniz indicernibilitets-prinsipp og det prinsipp i mengdelæren som sier at to individer er identiske om de er medlem av nøyaktig de samme mengdene. Påstanden vil her bli omtalt som *Identitetsaksiomet for mulige verdener* og det kan uttrykkes på den følgende måte i symboler:

(U10) (Aw,1)(Aw;2)(MV(w;1) & MV(w;2) –>
(w;1 = w;2 <–> (Ax)(Ut(x) –> (True(w;1,x) <–> True(w;2,x)))))

Man kan bemerke at dette identitetsaksiomet ikke kan utledes fra de prinsipper vi så langt har nevt, mao. er U10 intet teorem i teorien T;1- utvidet med U7, U8 og U9. Det bør også bemerkes at i motsetning til U7, U8 og U9 som har karakter av eksistensprinsipper for utsagn er U10 ikke noe direkte eksistensprinsipp.

Det følgende prinsipp sier at om to mulige verdener er forskjellige finnes det alltid to utsagn der det ene utsagnet er sant i den ene verdenen og der det andre utsagnet er sant i den andre verdenen, og der det ikke finnes noen verden hvor begge utsagnene er sanne. I symboler kan dette prinsippet uttrykkes slik:

(U11) (Aw;1)(Aw;2)((MV(w;1) & MV(w;2) & w;1≠w;2) –>
(Ex)(Ey)(Ut(x) &Ut(y) & True(w;1,x) & True(w;2,x) &
¬(Ew)(MV(w) & True(w,x) &True(w,y))))

Denne setningen i L;e[Δ;0] kaller vi for *Separabilitetsaksiomet*.

Tilslutt er det naturlig å omtale ytterligere tre aksiomer. Først nevnes *Det endelige konjunksjonsaksiom* som sier at dersom x og y er to utsagn finnes det alltid et utsagn som er sant i nøayktig de og bare de mulige verdenene hvor både x er sann og y er sann. Setningen kan uttrykkes slik:

(U12) (Ax)(Ay)(Ut(x) & Ut(y) –> (Ez)(Ut(z) &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,z) <–> (True(w,x) & True(w,y))))))

Dernest nevner vi det som her vil bli kalt *Finitiserbarhetsaksiomet* som sier at hvis a er en vilkårlig mengde med utsagn så finnes det alltid en endelig mengde med utsagn b som er slik at alle verdenene hvor alle utsagnene i a er sanne er nøyaktig de og bare de verdenene hvor alle utsagnene i b er sanne. Denne påstanden kan formaliseres slik:

(U13) M(a) &(Ax)(xêa –> Ut(x)) –>
(Eb)(M(b) & (Ax)(xêb –> Ut(x)) & Ca(b)<Aleph;0 &
(Aw)(MV(w) –> ((Ay)(yêb –> True(w,y)) <–>

(Ay)(yêa –>True(w,y))))

Helt tilslutt nevner vi den følgende setning som sier at mengden av alle utsagn eksisterer og er minst tellbart uendelig:

(U14) (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx –> Ut(y)) & Ca(x)≥Aleph;0)

Denne formelen i L;e[Δ;0] kaller vi for *Uendelighetsaksiomet for mengden av utsagn* .

§5.2 Om forholdet mellom de nye aksiomene. Ekvivalensteoremet.

Vi vil nå kommentere noen av de innbyrdes relasjoner som består mellom de setningene i L;e[Δ;0] som vi så langt har nevnt. Først bemerkes at man i teorien T;1– kan vise at at det uendelige konjunksjonsaksiom er ekvivalent med konjunksjonen av det endelige konjunksjonsaksiom og finitiserbarhetsaksiomet. Man kan mao. bevise:

Teorem 13: I teorien T;1– er det følgende et teorem:
U9 <–> (U12 & U13)

Beviset for denne påstanden overlates til leseren som en øvelse.

Dernest kan det være av interesse å merke seg at identitetsaksiomet for mulige verdener er ekvivalent med separabilitetsaksiomet i nærvær av negasjonsaksiomet for utsagn. Dette innebærer at det følgende teorem holder:

Teorem 14: I teorien T;1– er det følgende et teorem:
U8 <–> (U10 & U11)

Denne setningen viser at identitetsaksiomet for utsagn og separabilitetsaksiomet i det vesentlige uttrykker den samme påstand. Også i forbindelse med denne sats overlater vi beviset til leseren.

For det tredje gjør vi oppmerksom på at uendelighetsaksiomet for utsagn og negasjonsaksiomet sammen impliserer eksistensaksiomet for utsagn. Man har altså:

Teorem 15: I teorien T;1– er det følgende et teorem:
(U8 & U14) –> U7

Tilslutt kan det i denne forbindelse nevnes at alle setningene vi har omtalt ovenfor, U7 – U14, kan utledes i teorien T;1. Vi har derfor:

Teorem 16: I teorien T;1 er det følgende et teorem:
U7 & U8 & U9 & U10 & U11 & U12 & U13 & U14

Også når det gjelder denne satsen finner vi det rimelig å overlate beviset til leseren som en passende øvelse.

La nå T;1' være den teorien man får når man til T;1– legger til alle formlene U7 – U14 som nye ikke-logiske aksiomer. La videre T;1'' være den teorien man får når man legger til U8, U9, U11 og U14 som nye ikke-logiske aksiomer til teorien T;1–. La tilslutt T;1''' være teorien man får som resultat når formlene U8, U9, U10 og U14 legges til T;1– som nye ikke-logiske aksiomer. Gitt disse definisjonene holder den følgende sats:

Teorem 17: Th(T;1') = Th(T;1'') = Th(T;1''')

Vi gir ikke noe formelt bevis for denne sats siden den lett kan utledes ved hjelp av Teorem 13, Teorem 14 og Teorem 15. Man ser altså at de tre teoriene T;1', T;1'' og T;1''' er deuktivt ekvivalente.

La nå T;1'''' være den teorien man får når man til T;1– legger til formlene U7, U8, U9 og U11 som nye ikke-logiske aksiomer. Man kan da bevise den følgende sats:

Teorem 18: (Ekvivalensteorem) Man har:
(a) I teorien T;1'''' er formelen U4 et teorem.
(b) Teoriene T;1, T;1', T,1'', T;1''' og T;1'''' er alle deduktivt ekvivalente, dvs at;
Th(T;1)= Th(T,1') = Th(T;1'') = Th(T;1''') = Th(T;1'''')

Dette er et viktig teorem av to grunner: For det første viser satsen at fullstendighetsaksiomet for utsagn følger fra eksistensaksiomet for utsagn, negasjonsaksiomet, konjunksjonsaksiomet og separabilitetsaksiomet. Av disse fire aksiomene virker de tre første svært rimelige og det siste forholdsvis plausibelt. Teoremet viser derfor hvor langt vi har kommet i retning av å utlede U4 fra setninger i L;e[Δ;0] som muligens virker mer evidente. For det andre viser teoremet at teorien T;1 kan reaksiomatiseres på en rekke forskjellige måter, og viser derfor til muligheten av en rekke svakere teorier som det kan være opplysende å sammenligne teorien T;1 med. Reaksiomatiseringene av T;1 er også viktige fordi man forstår en teori bedre om man kjenner til flere forskjellige ekvivalente måter å formulere den på.

Vi skal nå gi et detaljert bevis for Teorem 18. Først er det imidlertid hensiktsmessig å gi et bevis for den følgende hjelpesetning:

Lemma 18.1: I teorien T;1'''' er følgende setninger teoremer:
(a) (Ax)(xêU –> Neg(x)êU)
(b) (Aa)((M(a) & a Inkl U) –> SNu(a)êU)
(c) aêPt(U) –> UNu(a) = Neg(SNu(Mg(Neg(x): xêa)))
(d) xêU –> s(Neg(u)) = (I– s(x))
(e) x,yêU –> s(K(x,y)) = s(x)Ωs(y)
(f) M(a) & a Inkl U –> s(SNu(a)) = SN(Mg(s(x): xêa))ΩI
(g) M(a) & a Inkl U –> s(UNu(a)) = UN(Mg(s(x): xêa))
(h) M(a) & a Inkl U –> UNu(a)êU

Det bør i forbindelse med denne sats bemerkes at definisjonene Definisjon 1 - Definisjon 3 også brukes i forbindelse med teorien T;1''''

Bevis: (a) Anta xêU. Da har man per definisjon av mengden U at U(x) og i lys av negasjonsaksiomet finnes det da noe y som er slik at:

(1) yêU & (Aw)(wêI –> (True(w,y) <–> ¬True(w,x)))

Fra (1) følger som man ser at (2) yêU & s(y) = (I – s(x)) . Ved hjelp av identitetsaksiomet for utsagn kan det bare finnes et objekt y som oppfyller kravet (2). Fra dette og definisjonen av Neg(x) følger yêU & y=Neg(x). Herav: Neg(x)êU.

(b) Anta (1) M(a) & a Inkl U. Fra (1) og konjunksjonsaksiomet U9 følger eksistensen av et objekt y der man har:

(2) Ut(y) & (Aw)(wêI –> (True(w,y) <–> (Ax)(xêa –> True(w,x))))

Fra (2) og definisjonen av s følger at (3) s(y) = IΩ SN(Mg(s(x): xêa)). I lys av U2 kan det bare finnes et objekt y som oppfyller betingelsen (3). Fra dette og definisjonen av "SNu" følger at yêU & y=SNu(a). Herav følger så SNu(a)êU.

(d) Anta xêU for vilkårlig x. Da har man på samme måte som under punkt (a) at det finnes et entydig bestemt objekt y som er slik at

(1) yêU & s(y) = I–s(x). Fra definisjonen av Neg(x) følger da (2) y=Neg(x). Dette sammen med (1) impliserer at s(Neg(x)) = (I–s(x)).

(e) Anta x,yêU. Da har vi {x,y} Inkl U og vi har dessuten at M({x,y}) i lys av parmengde-aksiomet. Ved hjelp av U9 følger det at det finnes et objekt y' der:

(1) Ut(y') & (Aw)(wêI –>(True(w,y') <–> (True(w,x) & True(w,y))))

Herav følger: (2) Ut(y') & s(y')=(s(x)Ωs(y)). Ved hjelp av U2 kan man slutte at det bare finnes ett objekt y' slik at (2). Fra dette og definisjonen av K(x,y) følger y'=K(x,y). Dette og (2) impliserer så at s(K(x,y)) = s(x)Ωs(y).

(f) Anta M(a) & a Inkl U. Da har vi på samme måte som under punkt (b) at det finnes et entydig bestemt objekt y som er slik at:

(1) yêU & s(y) = IΩSN(Mg(s(x): xêa))

Fra definisjonen av SNu(a) følger i så fall y=SNu(a). Da kan ved hjelp av (1) åpenbart slutte at: s(SNu(a)) = IΩSN(Mg(s(x): xêa)).

(g) Anta M(a) & a Inkl U. Anta for vilkårlig x at xêa. Da har vi xêU og i lys av punkt (a) ovenfor at Neg(x)êU. Det følger herav at: (1) (Ax)(xêa –> Neg(x)êU). Fra dette følger i sin tur: (2) Mg(Neg(x): xêa) Inkl U. Nå har man at Mg(Neg(x): xêa) er en mengde fordi u=Mg(<x,Neg(x)>: xêU) er en funksjon og fordi a er en mengde. Da følger at Mg(Neg(x): xêa) er en mengde ved hjelp av replacementaksiomet. Fra dette forhold og (2) kan man ved hjelp av punkt (f) ovenfor slutte at (3) SNu(Mg(Neg(x): xêa))êU. Fra (3) og punkt (a) følger så at Neg(SNu(Mg(Neg(x): xêa)))êU. Herav følger så at det finnes et objekt y der man har: (4) y=Neg(SNu(Mg(Neg(x): xêa))). Da har vi i lys av punkt (d) og (f) at:

(5) s(y) = I – s(SNu(Mg(Neg(x): xêa)))
= I – (SN(Mg(I–s(x): xêa)ΩI)
= UN(Mg(s(x): xêa))

I lys av U2 kan det bare finnes ett objekt y som oppfyller (5). Fra dette forhold og definisjonen av "UNu(a)" kan man slutte at (6) y= UNu(a). Fra dette og (4) følger UNu(a) = Neg(SNu(Mg(Neg(x): xêa))) som viser at punkt (c) holder. Videre følger fra de forhold som er nevnt at UNu(a)êU som viser at punkt (h) holder og tilslutt at s(SNu(a)) = UN(Mg(s(x): xêa)) som viser at punkt (g) også holder. Dette avslutter beviset for Lemma 18.1. **Q.E.D**.

For å gi et bevis for ekvivalensteoremet ovenfor er det også hensiktsmessig å bevise den følgende hjelpesetning:

Lemma 18.2: I teorien T;1"" er den følgende formel et teorem:
(a) (Aw)(wêI –> (Ey)(yêU & s(y) = {w}))

Bevis: Anta for vilkårlig w at (1) wêI. I lys av U7 følger da at det finnes et objekt y som er slik at: (2) yêU & True(w,y). Fra (1) og (2) følger (3) wês(y). Sett per definisjon: (4) q= (s(y) – {w}). Da har man q Inkl I. Man kan nå for hvert objekt w'êI betrakte mengden definert ved :

(5) Q(w') = Mg(x: xêU & True(w',x) &
(Ey)(yêU &True(w,y) & s(x)Ωs(y) =ø)

I lys av separabilitetsaksiomet, U11, ser man lett at: (6) (Aw')(w'êq –> Q(w')≠ø). Ifølge utvalgsaksiomet finnes det da en funksjon v der:

(7) Dom(v)=q & (Aw')(w'êq –> v(w')êQ(w'))

Fra (5), (6) og (7) følger at:

(8) (Aw')(w'êq –> (v(w')êU & True(w',v(w')) &
(Ey)(yêU & True(w,y) & s(v(w'))Ωs(y) =ø)))

Man har nå at (9) UN(Mg(s(v(w')): w'êq)) Ω {w} =ø. For anta for reduktio ad absurdum det finnes et objekt w;1 der : w;1êUN(Mg(s(v(w')): w'êq)) & w;1ê{w}. Da har man w;1=w og derfor at wê s(v(w')) for noe w'êq. Men at w'êq impliserer i lys av definisjonen (4) at w'≠w. Dessuten har man da i lys av (8) at det finnes yêU der True(w,y) & s(v(w'))Ωs(y)=ø. Siden wês(v(w')) er dette umulig. Dette viser at (9) ovenfor holder. Nå må man videre ha at:

(10) s(y)–{w} Inkl UN(Mg(s(v(w')): w'êq)).

For anta at rê(s(y)-{w}) for et eller annet vilkårlig objekt r. Da følger rês(y) & r≠w. Fra dette følger åpenbart rêq. Ved hjelp av (8) kan man da slutte: rês(v(r)). Men da følger rês(v(w')) for noe w' der w'êq. Det følger at rêUN(Mg(s(v(w')): w'êq)). Dette viser at (10) holder. Fra (9) og (10) følger:

(11) {w} = (s(y) – UN(Mg(s(v(w')): w'êq))

Inklusjonen mot høyre er opplagt i lys av (3) og (9). For å vise inklusjonen mot venstre kan man anta for vilkårlig r at rê(s(y) – UN(Mg(s(v(w')): w'êq)). Da har man rês(y) & ¬(rêUN(Mg(s(v(w')): w'êq))). Fra dette siste følger ved hjelp av (10) at ¬(rê(s(y)-{w})). Da har man r=w, dvs. rê{w}. Dermed er det ført bevis for at (11) holder. Vi har at yêU &(Aw')(w'êq –>v(w')êU). Dette innebærer at hvis man setter a= Mg(v(w'): w'êq) så har man fra (11) at

(12) {w} = (s(y) – UN(Mg(s(x): xêa))

Imidlertid har man at M(a) ved hjelp av replacement-aksiomet, det faktum at q er en mengde og at v er en funksjon. Videre må man ha at a Inkl U. Det følger derfor ved hjelp av Lemma 18.1 at s(UNu(a)) = UN(Mg(s(x): xêa)) og også at

(13) s(K(y,Neg(UNu(a)))) = (s(y) – UN(Mg(s(x):xêa))) = {w}

ved hjelp av (12). Men fra Lemma 18.1 har vi K(y,Neg(UNu(a)))êU. Fra (13) og (14) følger så (Ey)(yêU &s(y)={w}) som er det vi ønsker. Dette avslutter beviset for Lemma 18.2. **Q.E.D.**

Ved hjelp av Lemma 18.1 og 18.2 er det nå mulig å fullføre beviset for Teorem 18:

Bevis for Teorem 18: Fra Lemma 18.2 fremgår det at det følgende er et teorem i teorien T;1"":

(1) (Aw)(wêI –> (Ey)(yêU & s(y) = {w}))

Anta nå at X Inkl I for et vilkårlig objekt X der man har M(X). Fra (1) og utvalgsaksiomet følger at det finnes en funksjon v som er slik at:

(2) Func(v) & Dom(v)=I & (Aw)(wêI –> v(w)êU) & s(v(w))={w}

Setter man a=Mg(v(w):wêX) har man da at a Inkl U & M(a). Det følger i så fall ved hjelp av Lemma 18.1 at (3) UNu(a)êU og videre må man ha:

(4) s(UNu(a)) = UN(Mg(s(x): xêa)
= UN(Mg(s(v(w)): wêX))
= UN(Mg({w}:wêX)) = X

Fra (3) og (4) følger: (Ey)(yêU & s(y) = X). Dette viser at fullstendighetsaksiomet for utsagn er et teorem i T;1"". Dette impliserer i sin tur at den første delen av Teorem 18 holder. Siden U1, U2 og U3 er aksiomer i T;1"" følger da at alle de ikke-logiske aksiomene i T;1 er utledbare i T;1"". Siden det omvendte holder i følge Teorem 16 har man at T;1 og T;1"" er deduktivt ekvivalente. Nå har man videre at Th(T,1"") Inkl Th(T;1') Inkl Th(T;1). Fra dette og resultatet rett ovenfor følger at teorien T;1"" er deduktivt ekvivalent med teorien T;1'.

Resten av punkt (b) i Teorem 18 følger da ved hjelp av Teorem 17. Dette avslutter beviset for Teorem 18. **Q.E.D**.

§6 Noen kommentarer til spearabilitetsaksiomet.

Fra Teorem 18 fremgår det at hvis man tar teorien T;1– for gitt så er aksiomet U4, fullstendighetsaksiomet for utsagn, ekvivalent med konjunksjonen av de fire aksiomene: eksistensaksiomet for utsagn, negasjonsaksiomet, det uendelige konjunksjonsaksiomet for utsagn og endelig separabilitetsaksiomet. Av disse fire sistnevnte aksiomene virker de tre første svært uskyldige og det kan neppe reises alvorlig tvil i forbindelse med dem. Men separabilitetsaksiomet kan virke mer problematisk. Det er derfor av stor interesse å undersøke den status som denne setningen har. Merk at selvom det er tvilsomt om vi har lykkes i å utlede U4 fra setninger som er mer innlysende, siden det er høyest tvilsomt om separabilitetsaksiomet er det, har vi likevel avklaret noe den status U4 har siden vi så og si har avdekket fire komponenter i "meningsinnholdet" til denne setning, nemlig de fire aksiomene som ble nevnt ovenfor. Dette var på ingen måte klart på forhånd og må karakteriseres som interessant, og vesentlig, i lys av bevisets ikke-trivielle natur.

§6.1 Teorien T;2. En teori som ikke inneholder separabilitetsaksiomet.

Det kan være gunstig å gjøre et forsøk på å kaste ytterligere lys over separabilitets-aksiomet. For å gjøre dette kan man da ta sitt utgangspunkt i en teori som er noe svakere enn T;1. La T;2 være den teorien man får når man til T;1– , dvs. T;1 uten U4, legger til negasjonsaksiomet, det uendelige konjunksjonsaksiom og uendelighetsaksiomet for mengden av utsagn som de eneste nye ikke-logiske aksiomer. I teorien T;2 er altså ikke separabilitetsaksiomet med.

I forbindelse med denne teorien T;2 kan det først bemerkes at alle de ikke-logiske aksiomene i denne teorien kan utledes fra dem i T;1. Siden de to teoriene forøvrig har felles slutningsregler og de logiske og mengdeteoretiske aksiomene ellers er de samme, følger det at alle teoremene i T;2 er teoremer i T;1. Dette innbærer at T;1 er deduktivt sett minst like sterk som T;2. Dette oppføres som et eget teorem slik:

| **Teorem 19**: Th(T;2) Inkl Th(T;1) |

Det er formodentlig mulig å bevise at Th(T;2) SInkl Th(T;1) under visse rimelige betingelser, men det vil ikke bli gjort noe forsøk på å bevise dette her.

Det som derimot vil bli gjort er det følgende: Vi skal vise at teorien T;1 kan intepreteres inn i teorien T;2 på en naturlig måte. Den intuitive ideen bak denne intepretasjonen kan litt løst skisseres slik:

Antar vi at separabilitetsaksiomet holder kan to mulige verdener alltid skilles fra hverandre ved å angi to innbyrdes uforenelige utsagn der de to utsagnene er sanne i hver sin verden. Gir man nå opp dette krav kan flere forskjellige verdener være inseparable. Hvis man imidlertid sier at to slike verdener er ekvivalente om nøyaktig de samme utsagn er sanne i dem kan vi gruppere mengden av mulige verdener i innbyrdes disjunkte ekvivalensklasser. Det er så mulig å lage en modell for T;1 ved å identifisere det som er mulige verdener i T;1 med disse ekvivalensklassene og ved å konstruere sannhetsrelasjonen som en relasjon mellom slike ekvivalensklasser og utsagn på en passende måte. Det er delvis dette som er motivet bak den følgende definisjon:

Definisjon 4: (a) C(w) = Mg(y: yêU & True(w,y))
(b) w;1 ~;c w;2 <–> C(w;1) = C(w;2)
(c) [w];c = Mg(w': w'êI & wêI & w' ~;c w)
(d) Q;c = Mg([w];c : wêI)
(e) True*(x,y) <–> (xêQ;c & yêU &
(Ew)(wêI & wêx & yêC(w)))

Det fremgår fra definisjonen at C(w) er mengden av alle de utsagn som er sanne i verdenen w. Videre ser man forholdsvis umiddelbart at ~;c er en ekvivalensrelasjon over I, mengden av mulige verdener og at [w];c er mengden av alle de mulige verdener som er c-ekvivalente med w. Q;c er så mengden av alle slike ekvivalensklasser og True* er tilslutt den relasjonen som består mellom en slik ekvivalensklasse i Q;c og et utsagn hvis og bare hvis utsagnet er sant i en eller annen av de mulige verdenene som inngår i ekvivalensklassen.

Merk at de definisjonene som er gitt i Definisjon 4 såvel som dem som er sammenfattet i Definisjon 1 – 3 er ment som et supplement til alle våre teorier i L;e[Δ;0]. Man behøver altså ikke å endre disse definisjonene om man går over fra å arbeide med teorien T;2 til å arbeide med teorien T;1.

§6.2 Hovedanliggende i denne paragrafen er å gi et detaljert bevis for det følgende teorem:

Teorem 20: I teorien T;2 er de følgende formler teoremer:
(a) M(Q;c) & Ca(Q;c) ≥ Aleph;0
(b) (Ax)(Ay)(x,yêU –> (x=y <–>
(Aw)(wêQ;c –> (True*(w,y) <–> True*(w,x)))))
(c) (Ax)(Ay)(True*(x,y) –> yêU & xêQ;c)
(d) (Ax)(M(x) & x Inkl Q;c –> (Ey)(yêU &
(Aw)(wêQ;c –> (True*(w,y) <–> wêx))))

Setter vi "I" inn i stedet for "Q;c" og "True" inn for "True*" i formlene (a) – (d) ser man at versjoner av aksiomene U1 – U4 fremkommer som resultat. Formlene (a) – (d) har derfor en formell analogi med hhv. formlene U1 – U4. Man kan også bemerke at formlene (a) – (d) lar seg utlede i T;1 siden T;2 er en deduktivt sett svakere teori enn T;1.

Bevis for Teorem 20: Ad(a). Fra Definisjon 4 ser man at [w];c Inkl I om wêI. Vi har derfor, igjen i lys av Definisjon 4, at (1) Q;c Inkl Pt(I). Fra U1 følger M(I). Ved hjelp av potensmengdeaksiomet følger fra dette at M(Pt(I)). Ved hjelp av utsondringsaksiomet (1) og det forhold at M(Pt(I)) følger at M(Q;c). Dette viser den første halvdelen av (a). Beviset for den siste halvdelen av punkt (a) utsettes imidlertid til vi har bevist de resterende punkter i teoremet.

Ad (b). Anta x,yêU og at x=y. Da følger trivielt ved hjelp av identitetsaksiomene i predikatlogikken at

(Aw)(wêQ;c –> (True*(w,y) <–> True*(w,x)))

Anta på den annen side for vilkårlige objekter x og y at (1) x,yêU og dessuten at (Aw)(wêQ;c –> (True*(w,x) <–> True*(w,y))). Fra (2) og definisjonen av Q;c følger: (Aw) ((Er)(rêI & w=[r];c) –> (True*(w,x) <–> True*(w,y))). Herav følger så: (Ar)(rêI –> (True*([r];c,x) <–> True*([r];c,y)). Fra dette og definisjonen av True* følger videre: (Ar)(rêI –> (xêC(r) <–> yêC(r))). Men fra dette kan man utlede ved hjelp av definisjonen av C(r) at (Ar)(rêI –> (True(r,x)<–> True(r,y))). Herav følger så ved hjelp identitetsaksiomet for utsagn, U2, som inngår som et aksiom i T;2 at x=y. Dermed har det blitt ført et bevis for at punkt (b) holder.

Ad (c). Anta for vilkårlig x,y at True*(x,y). Da følger direkte fra definisjonen av True* at xêQ;c & yêU.

Ad (d). Anta for vilkårlig x at (1) M(x) & x Inkl Q;c. Vi ønsker å vise at konsekventen i punkt (d) holder. Definer (2) Y;0 = UN(x). Da følger
(3) Y;0 Inkl I. For anta wêY;0. Da følger at wêUN(x). Dette innebærer at (4) wêy og
(5) yêx &x Inkl Q;c for noe y. Dette i sin tur impliserer at det finnes w' der w'êI og hvor y=[w'];c. Men fra (4) har vi da wê[w'];c , noe som i lys av definisjonen av [w'];c impliserer wêI. Dette viser at (3) rett ovenfor holder. Nå har man videre at: (6) (Aw)(wêI –> ([w];cêx <–> wêY;0)). For anta for vilkårlig w at wêI og at [w];cêx. Siden wê[w];c (Jmf. definisjonen av [w];c) følger at wêUN(x) = Y;0. Anta på den annen side at wêY;0, ie. at wêUN(x). Da finnes det y der man har at wêy og yêx. Siden x Inkl Q;c kan man da slutte at y=[w'];c for noe w'êI. Da følger wê[w'];c og derfor w~;c w'. Herav wê[w'];c = [w];c=y. Fra dette og det at yêx følger så [w];cêx. Dermed har vi gitt et bevis for (6).

Ifølge Lemma 18.1 er formlene (a) – (h) som nevnes i denne sats teoremer i T;1"". En nærmere inspeksjon av beviset for denne sats viser at vi bare har benyttet aksiomene U1, U2, U3, U7, U8 og U9. Man ser imidlertid at U7 lett følger ved hjelp av uendelighetsaksiomet for utsagn og U8, negasjonsaksiomet. Formlene (a) – (h) som nevnes i Lemma 18.1 er derfor også teoremer i T;2. Siden C(w) Inkl U for alle wêI har vi derfor at SNu(C(w))êU og videre at

UNu(Mg(SNu(C(w)): wêY;0)êU

Setter man nå per definisjon q;0 = UNu(Mg(SNu(C(w)): wêY;0) har man da selvfølgelig at (7) q;0êU. I lys av dette ser man lett at vi vil ha gjennomført beviset for punkt (d) om vi kan vise at det følgende holder:

(+) (Aw)(wêQ;c –> (True*(w,q;0) <–> wêx))

(i) Anta (8) at wêQ;c & True*(w,q;0) for vilkårlig w. Da har man at (9) w=[w'];c for noe w'êI. Det følger at True*([w'];c,q;0). Fra dette og definisjonen av True* følger:
w"ê[w'];c & q;0êC(w") for noe w"êI. Da har man at w"~;c w' og derfor at
C(w')=C(w"). Det følger at (10) q;0êC(w') og derfor i lys av definisjonen av C(w') at (11) True(w',q;0). Fra (11) og definisjonen av q;0 følger
(12) True(w',SNu(C(w;1))) & w;1êY;0 for noe w;1. Fra (12) følger
(Ay)(yêC(w;1) –> True(w',y)), og herav kan man så slutte at

(13) (Ay)(yêC(w;1) –> yêC(w')).

Dette er ekvivalent med:

(14) C(w;1) Inkl C(w')

V skal nå bevise den følgende påstand:

(15) (Aw;1)(Aw;2)((¬(w;1~;c w;2) & w;1,w;2êI)
–> s(K(SNu(C(w;1)),SNu(C(w;2))))=ø)

Anta for vilkårlige w;1 og w;2 at ¬(w;1~;c w;2) & w;1,w;2êI. Etter definisjon av operasjonen C har vi da C(w;1)≠C(w;2). Da har vi for noe y;0 enten y;0êC(w;1) & ¬(y;0êC(w;2)) eller at ¬(y;0êC(w;1)) & y;0êC(w;2). I det første tilfellet har vi ¬(True(w;2,y;0)). Men dette innebærer at True(w;2,Neg(y;0)). Det følger også i dette tilfellet at True(w;1,y;0) og derfor at y;0êC(w;1). Men i så fall er man berettiget i å slutte at s(K(SNu(C(w;1)),SNu(C(w;2))))=ø. Det andre tilfellet blir helt analogt. Dette viser at (15) holder.

Nå har man at C(w')= Mg(y: yêU & True(w',y)). Det følger da i lys av definisjonen av SNu at w'ês(SNu(C(w')) og derfor at (16) s(SNu(C(w')))≠ø. Fra (14) følger (17) s(SNu(C(w')) Inkl s(SNu(C(w;1)). For anta zê s(SNu(C(w')). Da har vi:
(Ay)(yêC(w') –> True(z,y)). Ved hjelp av (14) følger da:

(Ay)(yêC(w;1) –> True(z,y))

som innebærer at zê s(SNu(C(w;1)). Dette viser at (17) holder. Fra (16) og (17) følger at s(SNu(C(w'))) Ω s(SNu(C(w;1))) ≠ø og derfor at det følgende holder:

(18) s(K(SNu(C(w')),SNu(C(w;1))))≠ø

Siden w;1,w'êI kan man fra (18) og (17) slutte at w'~;c w;1. Dette innebærer at (19) [w;1];c = [w'];c. Fra (19) og (9) følger så (20) w=[w'];c = [w;1];c. Men fra (12) ovenfor har vi w;1êY;0. Siden w;1êI følger da ved hjelp av (5) at w=[w;1];c êx. Vi har dermed vist den ene halvdelen av (+).

(ii) Anta på den annen side at wêQ;c & wêx for vilkårlig w. Da har vi w=[w'];c for noe w'êI. Videre har vi [w'];cêx. Fra (5) ovenfor følger i så fall w'êY;0. Da følger videre i lys av (6), siden True(w',SNu(C(w')) at True(w',q;0). Siden q;0êU har vi q;0êC(w'). Men siden w'ê[w'];c=w følger da fra definisjonen av relasjonen True* at True*(w,q;0). Dette avslutter beviset for (+) og dermed beviset for punkt (d) i teoremet.

Det gjenstår nå bare å vise at (#) Ca(Q;c)≥ Aleph;0. Definer da først en funksjon µ* ved µ*= Mg(<x,Mg(w: wêQ;c & True*(w,x))> : xêU) Man ser at denne µ* er definert helt i analogi med den µ som vi definerte tidligere. Det er nå ganske lett å vise ved hjelp av punktene (a) - (d) at (1) µ*: U -(1-1,på)–>Pt(Q;c)

Man verifiserer raskt at µ* er en funksjon, at Dom(µ*)=U og dessuten at Rgn(µ*) Inkl Pt(Q;c). Ved hjelp av punkt (b) er det så lett å vise at den er en-entydig og ved hjelp av punkt (d) kan man vise at den er på Pt(Q;c). Beviset for dette blir helt analogt med beviset for Teorem 1 bortsett fra at man nå bruker (b) – (d) istedet for U1 –U4. Forøvrig bemerker vi at vi i beviset for Teorem 1 henviste til eksistensen av I, men ikke til at I var tellbart uendelig. Forholdet blir her helt analogt. Vi har bruk for det faktum at Q;c og alle delmengder av denne mengden eksisterer, men vi trenger ikke å vite noe om hva kardinaltallet til Q;c er. Fra (1) følger at (2) Ca(U) = Ca(Pt(Q;c)). Anta nå for reduktio ad absurdum at Ca(Q;c)< Aleph;0. Da har vi også at Ca(Pt(Q;c)) < Aleph;0. Men i lys av (2) følger da at Ca(U) <Aleph;0 som strider mot uendelighetsaksiomet for mengden av utsagn. Dermed har vi levert et fullstendig bevis for Teorem 20. **Q.E.D**.

Som et korollar til Teorem 20 nevner vi det følgende intepretajonsteorem:

Teorem 21: La ∂ være den intepretasjonen av L;e[Δ;0] inn i L;e[Δ;0] som er bestemt ved at den er normal med hensyn på de logiske såvel som de mengdeteoretiske konstruksjonene og ved at den oppfyller de følgende krav:

(i) ∂(Mv(x)) = (xêQ;c)
(ii) ∂(Ut(x)) = Ut(x)
(iii) ∂(True(x,y)) = True*(x,y)

Da gjelder følgende:

(Aa)(aêTh(T;1) –> ∂(a)êTh(T;2))

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på Th(T;1). Siden ∂ i kraft av sin normalitet bevarer slutningsreglene modus ponens og universell generalisering og avbilder de logiske såvel som de mengdeteoretiske aksiomene på tilsvarende aksiomer i T;2 er det tilstrekkelig å vise at den avbilder aksiomene U1 – U4 på teoremer i T;2. Dette følger imidlertid som man lett ser umiddelbart fra definisjonen av ∂ og Teorem 20. **Q.E.D**.

I forbindelse med Teorem 21 nevner vi det følgende korollar:

Teorem 22: Det finnes en funksjon ∂ med de følgende egenskaper:

(i) ∂: Fm(L;e[Δ;0]) –> Fm(L;e[Δ;0])

(ii) ∂ er rekursiv
(iii) Rgn(∂) - Fm(L;e) ≠ø
(iv) ∂“Th(T;1) Inkl Th(T;2)

Bevis: Dette følger direkte fra Teorem 21. **Q.E.D**.

Det kan bemerkes at fra Teorem 5 følger Teorem 22 om vi utelater punkt (iii). For intepretasjonen ∂ som er definert i Teorem 5 har den følgende egenskap: ∂: Fm(L;e[Δ;0]) –> Fm(L;e). Men siden Fm(L;e) Inkl Fm(L;e[Δ;0]) følger (i) i Teorem 22. Siden videre ∂ i Teorem 5 er slik at

∂"Th(T;1) Inkl Th(ZFCu(L;e)) Inkl Th(T;2)

følger det at denne funksjonen også har egenskapen (iv) i teoremet som er nevnt ovenfor. Tilslutt må det også nevnes at ∂ i Teorem 5 er rekursiv. Derimot ser man at den ikke oppfyller kravet (iii). Derfor sier Teorem 22 oss noe mer om teorien T;2 enn vi kan slutte fra Teorem 5.

Det er rimelig å legge en viss vekt på Teorem 20 – 22, ikke bare fordi de er egnet til å kaste lys over separabilitetsaksiomet, noe som i seg selv er interessant, og heller ikke bare fordi teoremene er av en ikke-triviell natur, men fordi de viser at man i teorien T;2 som deduktivt sett er svakere enn T;1 kan gjøre nøyaktig de samme distinksjonene som i T;1.

Tilslutt bemerker vi at Teorem 22 fortsatt holder om vi bytter om T;1 og T;2. Identitetsavbildningen som avbilder hver formel i L;e[Δ;0] på seg selv vil da oppfylle kravene (i) – (iv).

På dette punkt kan det også bemerkes at om man føyer til separabilitetsaksiomet, eller ekvivalent, identitetsaksiomet for mulige verdener til teorien T;2 kan vi i den resulterende teori bevise den følgende formel:

(1) (Aw)(wêI –> [w];c = {w})

Denne teorien er forøvrig ekvivalent med T;1 slik at formelen (1) er å regne som et teorem i denne teori. Sløyfer vi identitetsaksiomet for mulige verdener er det ikke lenger mulig å bevise (1). Utvider vi imidlertid T;2 med f. eks. et aksiom av typen:

(2) (Ax)(xêQ;c –> Ca(x) ≥Aleph;0)

som sier at om w er en mulig verden vil det alltid finnes minst tellbart uendelig mange andre mulige verdener som er inseparable med w så ser man at denne teorien er uforenelig med T;1 fordi (2) er uforenelig med (1). Men man kan dog vise at T;2 utvidet med (2) er konsistent relativt til ZFCu(L;e) og at T;1 kan intepreteres inn i den.

§7 T;1 og T;2 med identitetsaksiomet fjernet.

Det er ingen absolutt innlysende sannhet at to utsagn er identiske om de er sanne i nøyaktig de samme logisk mulige verdenene. Dette innebærer jo at det finnes nøyaktig et og bare et utsagn som er sant i absolutt alle logisk mulige verdener og nøyaktig et utsagn som ikke er sant i noen mulig verden. Mao. impliserer aksiomet eksistensen av nøyaktig et logisk nødvendig utsagn og eksistensen av nøyaktig et kontradikstorisk utsagn. I denne forbindelse nevnes at vi i dette skrift vil bruke "t" for å betegne det logisk nødvendige utsagn og "k" for å betegne det kontradiktoriske utsagn. Uttrykkene kan defineres presist på den følgende måte:

Definisjon 5: (a) t = (iy)(yêU & s(y) =I)
(b) k = (iy)(yêU & s(y)=ø)

Den teorien man får som resultat når man fjerner identitetsaksiomet for utsagn fra T;1 skal her betegnes med T;3. Man kan vise at T;1 kan intepreteres inn i T;3 på en naturlig måte. Den intuitive idé bak denne intepretasjonen er den følgende:

Verdenene i T;1 identifiseres med verdenene i T;3. Derimot identifiseres utsagnene i T;1 med ekvivalensklasser av utsagn i T;3 i det to utsagn regnes som ekvivalente om de er sanne i nøyaktig de samme verdenene, eller sagt på en annen måte, har nøyaktig den samme sannhetsmengde. Sannhetsrelasjonen identifiseres med den relasjon som består mellom en mulig verden og en ekvivalensklasse med utsagn hvis og bare hvis minst ett av utsagnene i ekvivalensklassen er sant i den mulige verdenen. For å gjøre dette mer nøyaktig innføres den følgende definisjon:

Definisjon 5: (a) x~° y <–> Mg(w:wêI & True(w,x)) =
Mg(w:wêI
&True(w,y))
(b) [x]° = Mg(y: yêU & y~° x)
(c) U° = Mg([x]°: xêU)
(d) True°(x,y) <–> (xêI & yêU° &
(Eu)(uêy & True(x,u)))

Det følgende teorem har en viss analogi med Teorem 20:

Teorem 23: I teorien T;3 er de følgende formler teoremer:
(a) M(I) & Ca(I) ≥ Aleph;0
(b) (Ax)(Ay)(x,yêU° –> (x=y <–>
(Aw)(wêI –> (True°(w,y) <–> True°(w,x)))))
(c) (Ax)(Ay)(True°(x,y) –> yêU° & xêI)
(d) (Ax)(M(x) & x Inkl I –> (Ey)(yêU° &
(Aw)(wêI –> (True°(w,y) <–> wêx))))

Man ser her at hvis "U°" og "True°" i formlene (a) – (d) erstattes med henholdsvis "U" og "True" får man som resultat de vanlige aksiomene i T;1, dvs. U1 – U4. Man kan mao. si at strukturen <U°, True°,I> utgjør en modell for T;1

Bevis for Teorem 23: Ad(a). Dette er trivielt siden uendelighetsaksiomet for mengden av mulige verdener er et teorem i T;3, det inngår jo som et ikke-logisk aksiom.

Ad (b). Anta for vilkårlige x,y at

(1) x,yêU° & (Aw)(wêI –>(True°(w,x) <–> True°(w,y)))

Fra definisjonen av U° følger da eksistensen av u;1 og u;2 der (2) u;1êU & x=[u;1]° og der man har (3) u;2êU & y=[u;2]°. Anta for vilkårlig w at (4) wêI & True(w,u;1). Fra (4), (2) og definisjonen av av True° følger siden u;1ê[u;1]° at True°(w,x). Fra dette, (4) og (1) følger så True°(w,y). Herav følger (Eu)(uêy & True(w,u)). I lys av (3) innebærer dette (Eu)(uê[u;2]° & True(w,u)). Herav kan man så utlede:

(Eu)(s(u)= s(u;2) &True(w,u))

Men fra dette følger True(w,u;2). Dette viser riktigheten av den følgende påstand: (Aw)(wêI –> (True(w,u;1) –> True(w,u;2))). På en helt tilsvarende måte bevises: (Aw)(wêI –> (True(w,u;2) –> True(w,u;1))). Det følger at u;2 ~° u;1. Men fra dette kan man slutte, siden ~° er en ekvivalensrelasjon at [u;2]° = [u;1]°. I lys av (2) og (3) kan man så konkludere med at x=y.

Ad (c). Dette følger direkte fra definisjonen av True°.

Ad (d). Anta for vilkårlig x at (1) M(x) & x Inkl I. Siden U4 inngår som et ikke-logisk aksiom i T;3 har man fra (1) at det finnes et utsagn u som er slik at:

(2) uêU & (Aw)(wêI –> (True(w,u) <–> wêx))

Sett x'= [u]°. Da har man x'êU°. Anta for vilkårlig w at wêI & True°(w,x'). Da har man: True°(w,[u]°). Fra dette og definisjonen av relasjonen True° følger True(w,u). I lys av (2) har man da at wêx. Anta på den annen side at wêx & wêI for vilkårlig w. Da har man ved hjelp av (2) at True(w,u). Siden x'=[u]°êU° følger da True°(w,x'). Disse betraktningene viser at følgende holder:

(4) x'êU° & (Aw)(wêI –> (True°(w,x') <–> wêx)). Fra dette følger så konsekventen i punkt (d). Dermed er et fullstendig bevis blitt gitt for Teorem 23. **Q.E.D**.

Fra Teorem 23 følger lett det følgende intepretasjonsteorem:

Teorem 24: La ∂ være den intepretasjonen av L;e[Δ;0] inn i L;e[Δ;0] som er bestemt ved at den er normal med hensyn på de logiske såvel som de mengdeteoretiske konstruksjonene og ved at den oppfyller de følgende krav:

(i) ∂(Mv(x)) = (xêI)
(ii) ∂(Ut(x)) = (xêU°)
(iii) ∂(True(x,y)) = True°(x,y)

Da gjelder følgende:

∂"(Th(T;1)) Inkl Th(T;3)

Bevis: Man benytter seg av Teorem 23. **Q.E.D**.

I forbindelse med teorien T;1 kan det være av interesse å se på forholdet mellom denne teorien og ytterligere en teori, nemlig teorien T;4, som logisk sett er svakere en alle de teoriene som så langt har blitt betraktet. T;4 er den teorien som fremkommer når man fra T;2 fjerner identitetsaksiomet for utsagn, U2, og uendelighetsaksiomet for mengden av utsagn, U14, og erstatter dette siste aksiomet med det følgende aksiom som vi kaller for U15:

U15 (Ex)(M(x) & x Inkl U & Ca(x)≥ Aleph;0 &
(Ay)(Az)((y,zêx & y≠z) –> s(y)≠ s(z)))

Denne setningen uttrykker at det finnes en utsagnsmengde som er minst tellbart uendelig og der det gjelder for ethvert par av distinkte utsagn i mengden at deres respektive sannhetsmengder er distinkte.

Fra denne definisjonen av T;4 skulle det fremgå at T;4 er den teorien man får når ZFCu(L;e[Δ;0]) utvides med de følgende formler som nye ikke-logiske aksiomer:

U1 M(I) & Ca(I)≥Aleph;0
U3 True(w,x) –> (wêI & xêU)
U8 (Ax)(xêU –> (Ey)(yêU & s(y) =(I - s(x))))
U9 (Ax)(M(x) & x Inkl U –> (Ey)(yêU & s(y) = IΩSNu(Mg(s(z): zêx))))
U15 (Ex)(M(x) & x Inkl U & Ca(x)≥ Aleph;0 &
(Ay)(Az)((y,zêx & y≠z) –> s(y)≠ s(z)))

Det er nokså lett å vise at T;4 deduktivt sett er inkludert i teoriene T;2 og T;3. Dette innebærer at man har:

Teorem 25: Th(T;4) Inkl Th(T;2) & Th(T;4) Inkl Th(T;3)

Det er også mulig å vise at inklusjonene er ekte under visse rimelige forutsetninger. Imidlertid vil det ikke bli gitt noe detaljert bevis for dette her. Beviset for Teorem 25 overlates til leseren.

I forbindelse med teorien T;4 nevner vi den følgende setning:

Teorem 26: I teorien T;4 er de følgende formler teoremer:
(a) M(I) & Ca(I) ≥ Aleph;0
(b) x,yêU° –> (x=y <–>
(Aw)(wêI –> (True°(w,x) <–> True°(w,y))))
(c) True°(w,x) –> (wêI & xêU°)
(d) (Ax)(M(x) & x Inkl U° –> (Ey)(yêU° & (Aw)(wêI –>
(True°(w,y) <–> (Az)(zêx –> True°(w,z))))))
(e) (Ax)(xêU° –> (Ey)(yêU° &
(Aw)(wêI –> (True°(w,y) <–> ¬(True°(w,x)))))
(f) M(U°) & C(U°) ≥ Aleph;0

Vi gir ikke beviset for denne setningen her, men bemerker bare at beviset i de fleste henseende er analogt med det beviset som ble gitt for Teorem 23.

Erstatter man "U°" med "U" og "True°" med "True(w,x)" i formlene (a) - (f) i teoremet ovenfor ser man at de ikke-logiske aksiomene i teorien T;2 fremkommer som resultat.

Det følgende teorem er et korollar til Teorem 26:

Teorem 27: La ∂ være den intepretasjonen av L;e[Δ;0] inn i L;e[Δ;0] som er bestemt ved at den er normal med hensyn på de logiske såvel som de mengdeteoretiske konstruksjonene og ved at den oppfyller de følgende krav:
(i) ∂(Mv(x)) = (xêI)
(ii) ∂(Ut(x)) = (xêU°)
(iii) ∂(True(x,y)) = True°(x,y)
Da gjelder følgende:
∂"(Th(T;2)) Inkl Th(T;4)

Som man ser ved å studere disse to satsene kan man i teorien T;4 konstruere en modell av teorien T;2 ved å identifisere utsagnene i T;2 med elementene i mengden U° og ved å identifisere sannhetsrelasjonen i T;2 med relasjonen True°. De ting som er mulige verdener i T;2 kan så identifiseres med de mulige verdener i T;4. Fra dette ser man at teorien T;2 forholder seg til teorien T;4 på en måte som er analog med forholdet mellom T;1 og T;3 slik dette forhold er angitt ved Teorem 23 og Teorem 24.

Man kan nå stille det spørsmål om forholdet mellom T;1 og T;2 er analogt med forholdet mellom T;3 og T;4. Kan man lage en modell av T;3 i T;4 ved å identifisere de verdenene i T;4 som er indisirnible med hensyn på mengden av utsagn og ved å definere sannhetsrelasjonen på passende måte? Det følgende teorem viser at dette spørsmålet kan besvares bekreftende:

Teorem 28: I teorien T;4 er de følgende formler teoremer:
(a) M(Q;c) & Ca(Q;c) ≥ Aleph;0
(b) (Ax)(Ay)(True*(x,y) –> yêU & xêQ;c)

(c) (Ax)(M(x) & x Inkl Q;c –> (Ey)(yêU &
(Aw)(wêQ;c –> (True*(w,y) <–> wêx))))

Erstatter man i formlene (a) -(c) "Q;c" med "I" og "True*" med "True" ser man at de karakteristiske aksiomene for T;3, dvs. U1, U2 og U3 fremkommer som resultat. Beviset for Teorem 28 vil ikke bli gitt her siden det i nesten alle henseende vil bli en repitisjon av hovedpunktene i beviset for Teorem 20. Imidlertid må det i forbindelse med teorien T;4 nevnes at man ikke i denne teori kan bevise eksistensen av Neg(x) og SNu(a) om x er et utsagn og a er en mengde med utsagn. Dette kommer av at man ikke i T;4 har noe identitetsaksiom som entydig fastsetter negasjonen av et utsagn og konjunksjonen av utsagnene i en utsagnsmengde. Arbeider man innenfor rammen av T;4 er det intet som forhindrer at det kan finnes flere forskjellige negasjoner av et utsagn x, dvs. at det kan finnes flere utsagn som er sanne i nøyaktig de verdnene hvor utsagn x er usant. Man må derfor i beviset for Teorem 28 velge ut en representant fra mengdene Mg(y: s(y)=(I–s(x))) og Mg(y: yêU & s(y)=(IΩ Mg(s(x):xêa))) om x er et utsagn og a er en mengde med utsagn. Man kan så arbeide med disse representantene på samme måte som man tidligere arbeidet med Neg(x) og SNu(a). Tenker man seg at n(x) og k(a) er definert ved:

n(x) = Mg(y: s(y)=(I–s(x)))
k(a) = Mg(y: yêU & s(y)=(IΩ Mg(s(x):xêa)))

og at man for alle xêU og alle aêPt(U) har valgt ut et element fra n(x) og k(a) som man betegner med henholdsvis ng(x) og kn(a) så kan man naturligvis definere operajonene Neg og SNu ved Neg(x)= ng(x) og SNu(a)=kn(a). Innenfor rammen av T;4 er det da lett å vise at U er lukket under disse operasjonene og derfor alle de andre Boolske operasjonene som kan defineres ved hjelp av dem. I beviset for Teorem 28 kan man nå følge opplegget i beviset for Teorem 20, men operasjonene Neg og SNu må man nå tenke seg definert på den måten som det nå har blitt gjort rede for.

Fra Teorem 28 følger det følgende intepretasjonsteorem:

Teorem 29: La ∂ være den intepretasjonen av L;e[Δ;0] inn i L;e[Δ;0] som er bestemt ved at den er normal med hensyn på de logiske såvel som de mengdeteoretiske konstruksjonene og ved at den oppfyller de følgende krav:

(i) ∂(Mv(x)) = (xêQ;c)
(ii) ∂(Ut(x)) = (xêU)
(iii) ∂(True(x,y)) = True*(x,y)

Da gjelder følgende:

∂"(Th(T;3)) Inkl Th(T;4)

På dette punkt er det på sin plass å gi en oversikt over de teoriene som så langt har blitt definert og drøftet. I forbindelse med teorien T;1 ble det nevnt to teorier som var sterkere enn T;1 nemlig T;1+ og T;1++. I forbindelse med diskusjonen av T;1 tenkte man seg så at man fjernet det aksiomet som ble kalt fullstendighetsaksiomet for utsagn, U4, fra denne teorien, . Dette ble erstattet med en rekke andre aksiomer og en hel familie av teorier T;1', T;1", T;1"' og T;1"" ble betraktet i denne forbindelse. Alle disse teoriene viste seg å være deduktivt ekvivalente med teorien T;1. Ved å fjerne separabilitetsaksiomet fra en av disse teoriene fikk man som resultat teorien T;2 og ved å fjerne identitetsaksiomet for utsagn fra T;1 og T;2 fikk man som resultat henholdsvis teorien T;3 og teorien T;4. De rent deduktive relasjonene mellom disse teoriene er oppsummert ved hjelp av Figur 1 på neste side.

På denne figuren representerer en pil fra en teori til en annen det forhold at teoremene i den siste teorien er inkludert blandt teoremene i den første teorien. En dobbeltpil mellom to teorier betyr at teoriene har de samme teoremene.

Tidligere ble det vist at man på en naturlig måte kan avbilde teoremene i teorien T;1 inn i klassen av teoremer i teorien T;2 og klassen av teoremer i T;3. Videre ble det vist hvordan teoriene T;2 og T;3 kunne intepreteres inn i teorien T;4. Kaller man den intepretasjonen som ble definert i Teorem 21 for i;1 og den intepretasjonen som ble definert i Teorem 24 for i;2 følger ved hjelp av Teorem 21, Teorem 24, Teorem 27 og Teorem 29 at den følgende sats holder:

Teorem 30: (a) i;1 : Fm(L;e[Δ;0]) –> Fm(L;e[Δ;0])
(b) i;2 : Fm(L;e[Δ;0]) –> Fm(L;e[Δ;0])
(c) i;1"Th(T;1) Inkl Th(T;2) & i;2"Th(T;1) Inkl Th(T;3)
(d) i;2"Th(T;2) Inkl Th(T;4) & i;1"Th(T;3) Inkl Th(T;4)

Innholdet i dette teoremet er forsøkt anskueliggjort ved hjelp av Figur 2 på forrige side. På denne figuren representerer de ytterste sirklene teoremmengdene til henholdsvis T;1, T;2, T;3 og T;4. Avbildningene i;1 og i;2 er anskueliggjort på figuren ved hjelp av vertikale og horisontale linjer. Bildet av Th(T;1) over intepretasjonen i;2, som ifølge Teorem 30 er inkludert i Th(T;3) er anskueliggjort ved en sirkel innenfor den øverst til høyre, siden denne representerer Th(T;3). Lignende bemerkninger gjelder for de andre teoriene. Sirkelen som representerer i;2"Th(T;2) er stiplet. Merk at man ikke fra fra figuren kan slutte noe om hvorvidt denne mengden er identisk med i;1"Th(T;3). Det vil ikke bli gjort noe forsøk på å avgjøre dette her. Imidlertid ser man lett fra Teorem 30 at funksjonene i;1°i;2 og i;2°i;1 begge avbilder Th(T;1) inn i Th(T;4). Et spørsmål som kan stilles er om disse to intepretasjonene er identiske, og om de i en eller annen forstand er ekvivalente. Det første spørsmålet må besvares benektende. Det er faktisk slik at i;1°i;2 ≠ i;2°i;1. For er f.eks. A=(Ex)(MV(x)) er det temmelig lett å se at i;1(i;2(A)) ≠ i;2(i;1(A)). Det andre spørsmålet kan derimot besvares bekreftende i den forstand at hvis AêFm(L;e[Δ;0]) så er i;1(i;2(A)) ekvivalent i T;4 med i;2(i;1(A)). Dette oppføres som et eget teorem:

Teorem 31: Anta AêFm(L;e[Δ;0]). Da gjelder at i;1(i;2(A)) <–> i;2(i;1(A)) er et teorem i teorien T;4

Beviset for denne påstanden er imidlertid for langt til at det kan inkluderes her. Det er gitt helt detaljert i Rognes [3].

§8 Om en familie med utvidelser av teorien T;1. Forholdet mellom urindivider, mulige verdener og utsagn.

Selvom teorien T;1 kodifiserer endel av de setningene i L;e[Δ;0] som virker rimelige utifra den intepretasjonen av dette språk som man intuitivt har i tankene, er det selvfølgelig nokså lett å vise at den ikke avgjør alle de mulige spørsmål som kan stilles om utsagn innenfor rammen av dette språk. For eksempel sier uendelighetsaksiomet for mengden av mulige verdener bare at denne mengden er finnes og at den er minst tellbart uendelig. Teorien T;1 avgjør derfor ikke om Ca(I) = Aleph;0 eller om Ca(I) = Ca(Exp(2, Aleph;0)) eller om I har et helt annet kardinaltall. Dette spørsmål vil imidlertid betraktes nærmere i en helt annen forbindelse. Videre avgjør ikke teorien T;1 en rekke spørsmål som kan stilles om forholdet mellom urindivider, mengder, mulige verdener og utsagn. Vedrørende utsagn er det for eksempel tre muligheter: Mengden av utsagn kan være inkludert i klassen av mengder, dvs. (1) (Ax)(Ut(x) –> M(x)), mengden av utsagn kan delvis "overlappe" klassen av alle mengder i.e. (2) (Ex)(Ut(x) &¬M(x)) & (Ex)(Ut(x) & M(x)). Tilslutt er det mulig at mengden av utsagn kan være disjunkt med klassen av alle mengder i.e. man kan ha at (3) ¬(Ex)(Ut(x) & M(x)). Tre tilsvarende muligheter foreligger når det gjelder I. Ingen av de følgende setninger tatt isolert avgjøres av T;1:

(4) (Ax)(MV(x) –> M(x))
(5) (Ex)(MV(x) &¬M(x)) & (Ex)(MV(x) & M(x))
(6) ¬(Ex)(MV(x) & M(x))

Tillutt kan man betrakte tre muligheter angående forholdet mellom U og I. Isolert kan f.eks. hver av de følgende tre setninger legges til T;1 uten at motsigelser oppstår:

(7) ¬(Ex)(Ut(x) & MV(x))
(8) (Ex)(Ut(x) & MV(x)) & (Ex)(Ut(x) & ¬Mv(x)) & (Ex)((¬Ut(x)) & MV(x))
(9) (Ax)(MV(x) –> U(x))

Forskjellige kombinasjoner av disse setningene i L;e[Δ;0] kan legges til teorien T;1 uten at motsigelser oppstår. Hvis man velger ut en setning blandt (1) – (3), en blandt (4) – (6) og en blandt (7) – (9) ser man at det i prinippet vil være 3^3 mulige måter å utvide T;1 på. Endel av disse utvidelsene er inkonsistente. Men endel av teoriene vil være konsistente om T;1 er det og de vil være innbyrdes uforenelige. Hvilke av disse utvidelsene som er plausible og hvilke som ikke er det skal det ikke tas stilling til her. Men overveielsene viser at teorien T;1 er ufullstendig og at en rekke spørsmål av filosofisk karakter oppstår når man søker å gjøre den mer fullstendig.

Det kan på dette punkt være av interesse å gi en mer fullstendig oversikt over endel av de mulighetene som kan tas i betraktning. Det er naturlig å starte med forholdet mellom I og U som ble omtalt rett ovenfor. I T;1 kan man vise at Ca(U)= Ca(Pt(I)). I lys av dette teorem er det derfor utelukket at I=U eller at U Inkl I. Men de følgende tre formler, A1, A2 og A3, kan enkeltvis legges til T;1 som nye ikke-logiske aksiomer uten at motsigelser oppstår:

A1 IΩU=ø
A2 I SInkl U
A3 IΩU≠ø & (I-U)≠ø & (U-I)≠ø

Mao. I og U kan være disjunkte, I kan være strengt inkludert i U, og endelig kan mengdene I og U overlappe hverandre. Man ser lett at setningene A1 – A3 er uforenelige og at man også kan vise at disjunksjonen av dem, dvs. A1 v A2 v A3 er et teorem i T;1. Beviset for dette siste kan overlates til leseren som en øvelse.

"Ur" betegner i det følgende mengden av urindivider, i.e. mengden av alle de entiteter som ikke er mengder. Uttrykket "Me" vil bli brukt akkurat her for å betegne klassen av alle mengder. Formelt sett kan de to termene defineres ved Ur=Mg(x: ¬M(x)) og Me= Mg(x: M(x)). Fra disse to definisjonene ser man umiddelbart at UrΩMe=ø. Når det imidlertid gjelder plasseringen av I i forhold til mengden av urindivider og mengden av mengder foreligger de følgende muligheter:

B1 I SInkl Ur
B2 I=Ur
B3 IΩUr≠ø & IΩMe≠ø & (Ur-I)≠ø
B4 IΩUr≠ø & IΩMe≠ø & (Ur-I)=ø
B5 I SInkl Me

Man ser nokså lett at setningene B1 – B5 er innbyrdes uforenelige. Videre er det ikke særlig vanskelig å vise at disjunksjonen av dem B1 v B2 v B3 v B4 v B5 er et teorem i T;1. Mao. utgjør B1 – B5 et sett av muligheter som er uttømmende og innbyrdes uforenelige.

På tilsvarende vis oppstår det også fem helt analoge muligheter når det gjelder plasseringen av U i forhold til Ur og Me:

C1 U SInkl Ur
C2 U=Ur
C3 UΩ Ur≠ø & UΩMe≠ø & (Ur-U)≠ø
C4 U ΩUr≠ø & UΩMe≠ø & (Ur-U)=ø
C5 U SInkl Me

Også i forbindelse med C1 – C5 skulle det være enkelt å se at disse formlene er innbyrdes uforenelige og at disjunksjonen av dem C1 v C2 v C3 v C4 v C5 er et teorem i T;1. Man kan nå se på alle formler av typen Aj & Bk & Cr der 1≤j≤3, 1≤k≤5 og 1≤r≤5. Man ser at det i alt vil være 3·5·5 = 75 slike formler og at disjunksjonen av alle disse formlene er et teorem i T;1. Det følger fra dette at det finnes minst 75 mulige måter å utvide T;1 på. Nedenfor er gitt en tabell som gir en oversikt over disse mulighetene. Utvides T;1 med noen av disse formlene vil resultatet bli en teori som er inkonsistent. Utvides T;1 med andre av formlene får man som resultat en teori som er konsistent om ZFC er det.

De aksiomkombinasjonene som gir som resultat en inkonsistent teori er merket "–". De aksiomkombinasjoner som gir som resultat en konsistent teori er merket "+". Fra tabellen ser man f.eks. at om man utvider T;1 med A1, B3 og C3 som nye ikke-logiske aksiomer får man en konsistent teori. Beviset for de påstander som er gitt i tabellen er svært langt om det skal gjennomføres detaljert. Det er imidlertid av en rent rutinemessig karakter og vi utelater det derfor her.

Det aksiomet som muligens fortoner seg mest naturlig er settet A1,B1 og C1. Hvis dette aksepteres er mengden av utsagn disjunkt med mengden av mulige verdener. Videre er mengden av mulige verdener og mengden av utsagn begge strengt inkludert i mengden av urindivider. Dette innebærer da at ingen mulig verden og intet utsagn er noen mengde.

Aksepterer man disse tre aksiomene følger det at mengden av urindivider er uendelig. Men det ville kanskje også være naturlig å gå et steg videre og legge til et aksiom som sier at det også finnes uendelig mange urindivider som ikke er mulige verdener eller utsagn.

§9 Om mulige videreføringer av T;1.

I språket L;e[Δ;0] inngår bare de mengdeteoretiske konstruksjonene og de konstruksjonene som vi forkortet med "MV(x)", "Ut(x)" og "True(x,y)" i det ikke-logiske vokabularet. Siden språket inneholder såpass få primitive konstruksjoner kunne man fristes til å tro at det var temmelig uttrykksfattig og at virkelig interessante setninger av metodologisk og vitenskapslogisk karakter ikke kan uttrykkes i det. Dette viser seg imidlertid ikke å være tilfelle. I endel arbeider vil vi vise at en rekke konstruksjoner som er av grunnleggende betydning innen vitenskapslogikken kan defineres på en helt rimelig måte innenfor rammen av L;e[Δ;0]. På dette punkt kan det være av interesse å gi en liste, som på ingen måte er ment å være fullstendig, over noen av de viktigste konstruksjonene som kan nevnes i denne forbindelse:

(1) "x er et utsagn som er en logisk konskvens av utsagnet y"
(2) "x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y"
(3) "x er et utsagn som er logisk ekvivalent med utsagnet y"
(4) "x er en utsagnsmengde som er logisk ekvivalent med utsagnsmengden y"
(5) "x er en teori"
(6) "x er en fullstendig teori"
(7) "x er en konsistent utsagnsmengde"
(8) "x er en maksimalt konsistent utsagnsmengde"
(9) "x er en utsagnsmengde hvor alle elementene er logisk uavhengige av hverandre"
(10) "x er en utsagnsmengde hvor alle elementene er strengt logisk uavhengige av hverandre"
(11) "x er konsekvenssystemet til utsagnsmengden y"
(12) "x er en hypotese relativt til utsagnsmengden y"
(13) "x er en deduktivt lukket utsagnsmengde"
(14) "x er et hypotetisk deduktivt system relativt til utsagnsmengden y"

I et annet arbeid vil det bli foreslått definisjoner av disse begrepene på basis av de primitive predikatene i L;e[Δ;0]. Disse definisjonene vil bli diskutert og på basis av aksiomene i T;1 vil en rekke setninger om de begrepsdannelsene som er tatt med på listen ovenfor bevist.[14]

Det kan også nevnes at man kan utvide språket L;e[Δ;0] med nye primitive predikater. Her skal bare de følgende predikater nevnes, nemlig:

(15) "x er en egenskap av grad y"

---

[14] Det bør kanskje understrekes at T;1, som de øvrige teorier som har blitt presentert, er en generell teori om utsagn. Det er ingen teori som sier noe om mer spesifikke egenskaper ved spesielle utsagn f. eks. det utsagn at Einsteins spesielle relativitetsteori er sann eller det utsagn at jorden har kuleform. Ønsker man å si noe mer spesifikt om disse utsagnene må man innføre nye konstruksjoner: "x er det utsagn at Einsteins spesielle relativitetsteori er sann", "x er det utsagn at jorden har kuleform" og utvide L;e[Δ;0] med disse konstruksjonene. I det utvidete språk kan man så uttrykke forskjellige påstander om disse spesielle utsagnene. Merk at de nevnte predikater neppe kan defineres ved hjelp av uttrykkene i L;e[Δ;0].

(16) "x er et mulig individ"
(17) "x er et mulig individ som har egenskapen y i verdenen w"

Utvides L;e[Δ;0] med disse og bare disse nye predikatene får man et rikere språk. Man kan så tenke seg teorien T;1 utvidet med nye ikke-logiske aksiomer som gjelder for konstruksjonene (15) – (17). I forbindelse med dette rikere språk synes det også å være mulig å innføre en rekke begrepsdannelser om har stor interesse innenfor vitenskapslogikken og metodelæren. I Rognes [2] gis et sammendrag av en slik konkret utformet teori og i endel andre arbeider har vi utviklet denne teorien videre.[15]

§10 Kritiske bemerkninger til T;1

Hvis man ønsker å kritisere teorien T;1 eller eventuelt en av de sterkere eller svakere teoriene i den teorifamilien som har blitt beskrevet synes det å være flere forskjellige muligheter. Man kan betrakte blandt annet de følgende muligheter. Men de behøver ikke være de eneste:[16]

(i) Man kan forsøke å vise at det finnes visse setninger S;1 ... S;n (n≥1) som har de følgende egenskaper: (a) S;1, ..., S;n er alle intuitivt svært plausible eller lar seg begrunne på en måte som gjør at man svært vanskelig kan benekte riktigheten av dem. (b) Setningene S;1,...,S;n impliserer setningen:

(A) Konstruksjonene "x er en mulig verden" og "x er et utsagn" gir ingen tilfredstillende vitenskapelig mening"

og det skal være mulig å gi rimelige argumenter til fordel for denne implikasjonen.

Hvis man nå antar at setningen (A) er riktig vil alle de setningene i L;e[Δ;0] som inneholder konstruksjonene "x er en mulig verden" og "x er et utsagn" være uten noen tilfredsstillende vitenskapelig mening. Sannhetsverdien til setningene U1 – U4 som inneholder disse konstruksjonene kan da neppe undersøkes eller fastsettes på noen vitenskapelig måte. Hvis derfor en setning av typen (A) er riktig synes man følgelig å ha rørt ved selve livsnerven til en teori som T;1. Det samme kan sies om alle de andre teoriene som har blitt omtalt tidligere. En person som i så fall hevder at T;1 er korrekt i den forstand at alle teoriens teoremer er sanne, må vel da, mildt sagt, kunne karakteriseres som noe ufornuftig. Imidlertid er det vel et åpent spørsmål om det er mulig å vise eksistensen av et setningssett S;1,...,S;n med egenskapene (a) og (b) ovenfor. Så langt virker det ikke som om noen helt eksplisitt og på en allment akseptert måte har gjort dette. Dessuten kan man ha vanskeligheter med å se at det skulle følge noe som helst absurd eller urimelig fra negasjonen av setningen (A).

---

[15] I denne sammenheng henviser vi til arbeidene Rognes [4] og Rognes [7]. Forskjellige teorier om egenskaper blir detaljert fremstilt og diskutert i Rognes [7]. De kortere arbeidene Rognes [2], [4] gir sammendrag av teorier som blir mer utførlig behandlet i Rognes [7].

[16] La oss her nevne at blandt de mer iherdige kritikere av teorier av typen T;1 er det naturlig å fremheve W.V. Quine. Enhver som vil danne seg et uhildet bilde av T;1 og de andre utsagnsteoriene vi har trukket inn i bildet bør i detalj studere hans skrifter. I denne forbindelse henvises det til Quine[1] - [3]. Quines hovedtanke vedrørende dette tema kunne kanskje kort, men sikkert overforenklet formuleres slik: Hvis det finnes utsagn og beskrivende setninger i et språk uttrykker utsagn så vil dette indusere en synonymitetsrelasjon mellom de deskriptive setningene i språket: To setninger er synonyme om de uttrykker det samme utsagn. Quine finner imidlertid etter å ha studert en lang rekke definisjonsforslag av synonymitet at disse definisjonsforslag enten har preg av å være sirkulære eller at de ender opp med å forklare synonymitet ved hjelp av uttrykk som etter hans mening er like uklare. I denne forbindelse kan man særlig studere Quine [1] og [3]. I lys av slike overveielser, og også på annet grunnlag, synes konklusjonen å være at synonymitet ikke gir noen tilfredstillende mening og at troen på ekstralingvistiske og objektive meningsstørrelser som f.eks. må anses som ubegrunnet, ja rent ut sagt en myte.(Se Quine [3] side 8) I Quine [2] forsøker så forfatteren å utarbeide et språksyn som ikke er basert på denne angivelige vidt utbredte myte. Plasshensyn avskjærer oss fra å drøfte disse interessante synspunkter her.

(ii) En annen fremgangsmåte om man ønsker å kritisere T;1 ville være den følgende: Man forsøker å vise at det finnes et språk L' som er en utvidelse av L;e[Δ;0] og at det finnes et sett med setninger S;1,...,S;n (n≥1) i L' som oppfyller de følgende to krav: (a) Setningene er intuitivt sett mer plausible enn U1 – U4, eller de lar seg begrunne på en tilfredstillende måte. (b) Setningene impliserer sammen med U1 – U4 logisk sett visse setninger som er av åpenbart fullstendig uakseptabel karakter. Hvis man skulle lykkes i å spesifisere et slikt språk L' og et setningssett S;1,...,S;n med egenskapene (a) og (b) må det medgis at man har gitt et tungtveiende argument mot T;1. Man ser også at denne fremgangsmåten er forskjellig fra den foregående i det man ikke forsøker å vise at språket L;e[Δ;0] inneholder konstruksjoner som fra en vitenskapelig synsvinkel er uten mening. Imidlertid virker det rimelig å si at man også ved denne fremgangsmåten må regne med visse vanskeligheter. For det første kan det vel sies med en viss berettigelse at det ikke foreligger noen allment akseptert teori om når visse setninger er intuitivt sett mer plausible enn andre eller når de lar seg begrunne på en tilfredstillende måte. Man må vel derfor regne med at det kan være vanskelig å nå noen ukontroversielle avgjørelser om hvorvidt kravet (a) er oppfylt for visse setninger S;1, ..., S;n. For det andre er det vanskelig å se at noen har avdekket noen absurde konsekvenser av teorien T;1 selvom den tenkes utvidet på den måten som er skissert ovenfor.

(iii) En tredje fremgangsmåte er også tenkelig. Man kan forsøke å vise at det finnes et bestemt antall setninger S;1,...,S;n som har de følgende egenskaper:
(a) Setningene S;1, ..., S;n er alle intuitivt plausible eller lar seg begrunne på en måte som gjør at man vanskelig kan benekte riktigheten av dem. (b) Man kan vise at følgende setning følger logisk fra S;1,...,S;n:

(B) Teorien T;1 har ingen funksjon innenfor den enkleste, altomfattende vitenskapelige teori som trengs for å bringe orden i og gjøre forståelig alle de data som er tilgjengelige.

Imidlertid behøver ikke argumenter som tar sikte på å vise dette å være tvingende. Man kan betrakte den følgende setning:

(C) T;1 er en vitenskapelig teori som objektivt sett er svært plausibel.

Hvis man hypotetisk antar at (C) er sann synes det rimelig å trekke den slutning at den enkleste altomfattende teori som trengs for å gjøre forståelig alle tilgjengelige data inkluderer T;1 og at man ikke uten videre kan kutte ut T;1 uten å gå glipp av vesentlige sannheter og innsikter. Den synes da å ha en funksjon. Mao. virker det som om (C) er uforenelig med (B). Går man nå et skritt videre og hevder at det ikke er absurd på noen måte å hevde at (C) er mer plausibel enn (B) synes det å følge at det heller ikke er absurd å benekte eksistensen av et sett med setninger S;1, ... , S;n som oppfyller kravene (a) og (b).

La oss til slutt gjøre det klart at vi ikke ønsker å ta noe stilling til setningene (A), (B) eller (C). I det hele tatt vil vi ikke ta noen definitiv stilling til teorien T;1 eller noen av de andre teoriene som har blitt omtalt. En personlig stillingtagen av denne art synes helt uvesentlig og uten noen dyptgående interesse. Derimot ser vi i teorien T;1 et interessant studieobjekt som kan være verdt mer inngående studier.

§11 Oppsummering og avslutning.

I denne paragrafen vil vi foreta en oppsummering og fremsette noen avsluttende refleksjoner i tilknytning til det som har blitt gjort i dette arbeidet.

Først og fremst bør det understrekes at hovedresultatene i dette arbeidet representeres av teoremene Teorem 1 – Teorem 31. Dessuten har i hovedsaken det følgende blitt gjort:

(i) Språket L;e[Δ;0] har blitt detaljert definert og kommentert. I forbindelse med dette ble teorien T;1 som inneholder de utsagnsteoretiske aksiomene U1 – U4 detaljert beskrevet .

(ii) Det ble først vist at hvis man forutsetter at teorien T;1 er sann så finnes det en isomorfi mellom utsagn og mengder av mulige verdener. Dette ledet til det følgende punkt, nemlig en formulering av visse sterkere teorier T;1+ og T;1++. I forbindelse med dem ble det også vist hvordan teorien T;1 kunne reduseres, og det ble vist at teoriene T;1, T;1+ og T;1++ var konsistente relativt til det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L;e). I tillegg ble det også gitt et bevis for at de er konservative utvidelser av dette mengdeteoretiske systemet.

(iii) Etter dette fulgte en mer detaljert diskusjon av de utsagnsteoretiske aksiomene U1 – U4 i teorien T;1. Et viktig resultat var at U4 var ekvivalent med fire andre aksiomer: eksistensaksiomet for utsagn, negasjonsaksiomet, det uendelige konjunksjonsaksiom og den interessante formulering i L;e[Δ;0] som ble omtalt som separabilitetsaksiomet for utsagn. Dette ledet til fire alternative aksiomatiseringer av T;1, nemlig T;1', T;1", T;1"' og T;1"".

(iv) Tre teorier som fra en deduktiv synsvinkel ble funnet å være genuint svakere enn T;1 ble så studert. Det dreide seg for det første om teorien T;2 som fremkom fra en av de ekvivalente aksiomatiseringene av T;1 ved å fjerne separabilitetsaksiomet. Videre dreide det seg om teorien T;3 som fremkom direkte fra T;1 ved å fjerne identitetsaksiomet for utsagn, og endelig om teorien T;4 som man fikk fra T;2 ved å fjerne identitetsaksiomet for utsagn og dessuten legge til et nytt aksiom istedet for uendelighetsaksiomet for mengden av utsagn. Det ble så vist at teorien T;1 kunne intepreteres inn i teoriene T;2 og T;3, og at disse i sin tur kunne intepreteres inn i T;4. Dette hadde som konsekvens at T;1 kunne intepreteres på to ulike måter inn i T;4. Vi viste tilslutt at de to sistnevnte intepretasjonene i en viss betydning var ekvivalente.

Slik de er formulert er naturligvis ikke T;2, T;3 og T;4 uforenelige med teorien T;1. Men hvis T;4 utvides med den antagelse at det finnes to distinkte utsagn med samme sannhetsmengde og minst to mulige verdener som er distinkte, men der nøyaktig de samme utsagn er sanne, så får man en teori som bokstavelig talt er uforenelig med T;1. Imidlertid behøver ikke de to teoriene å oppfattes som rivaliserende om man anser T;4 som en kodifisering av sannhetene om en annen type utsagn, og en annen type mulige verdener, enn dem som omtales i T;1. I så fall viser intepretasjonsteoremet at teorien T;1 kan reduseres til teorien T;4. Teoremet kunne derfor tjene til å underbygge ens tro på at T;1 kodifiserer sannhetene, eller en del av sannhetene, vedrørende et interessant utsagnsbegrep, og et interessant begrep om mulige verdener, som riktignok er forskjellige fra, om enn beslektet med, de begreper som inngår i T;4.

Referanser

Referanser

Carnap [1], Carnap, Rudolf, *Meaning and Necessity* , The University of Chicago Press, Chicago & London, 1956
Cresswell [1], Cresswell,M.J., *Logics and Language* , Methuen &Co. Ltd., 1973
Hughes & Cresswell [1], Hughes and Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen & Co. Ltd., 1968
Kripke [1], Kripke, Saul A., "Semantical analyis of modal logic I. Normal modal propositional calculi.", *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen der Mathematik.,* Bd.9, side 67 - 96, 1963
Prawitz [1], Prawitz, Dag, "Propositions", *Theoria,* vol.34, 1968, p 134 - 146
Quine [1], Quine, W.V., *From a logical point of wiew.*, Harvard University Press, 1953
Quine [2], Quine, W.V., *Word and Object*, Massachusetts, 1960
Quine [3], Quine, W,V., *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, 1970
Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Et bevis for et teorem om intepretasjoner i teorien om presise deskriptive utsagn* , Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [4], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [5], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [6], Rognes, Morten, *Noen betraktninger over urindivider i Zermelo-Fraenkel mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [7], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I.*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Stoll [1], Stoll, Robert, *Set Theory and Logic,* W.H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1963

*

APPENDIX A

Noen bemerkninger om teorien T;1 og dens sammenheng med Boolske algebraer.

Noen bemerkninger om teorien T;1 og dens sammenheng med Boolske algebraer.

Poenget med det følgende tillegg er å vise hvordan Boolske algebraer, og mer spesielt et representasjonsteorem for Boolske algebraer, kan bidra til å kaste noe lys over teorien T;1.

I det vi følger Stoll [1], Ch 6, §3, defineres en Boolsk algebra slik:

En Boolsk algebra er et hvilket som helst triple <B,Sn,c> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) Sn : Prod(B,B) –> B
(ii) c: B –> B
(iii) Ca(B)≥2
(iv) Sn er en assosiativ og kommutativ operasjon over B
(v) (Ax)(Ay)(x,yêB &(Ez)(zêB & Sn(x,c(y)) = Sn(z,c(z))). –> Sn(x,y)=x)
(vi) (Ax)(Ay)(x,yêB & Sn(x,y)=x –> (Az)(zêB –> Sn(x,c(y)) = Sn(z,c(z))))

Er **B** = <B,Sn,c> en Boolsk algebra defineres relasjonen ≤ slik: x≤y <–> Sn(x,y)=x for alle x,yêB. Det skulle være klart at relasjonen ≤ svarer til mengdeinklusjons-relasjonen Inkl. De følgende predikatkonstruksjoner innføres:

(1) "x er et utsagn" Dette forkortes med "Ut(x)"
(2) "x er konjunksjonen av utsagnene y og z". Denne konstruksjonen forkortes med "Kn(x,y,z)"
(3) "x er negasjonen av utsagnet y". Når det gjelder dette predikatet benyttes"neg(x,y)" som forkortelse.

I det følgende betraktes språket L;e utvidet med (1) – (3) som nye ikke-logiske konstruksjoner. Kaller man mengden som inneholder konstruksjonene (1) – (3) og bare dem for P:0 betraktes altså L;e[P;0], dvs. språket L;e utvidet med konstruksjonene i P;0.

I forbindelse med dette språket gis først den følgende definisjon:

Definisjon 1: (a) U = Mg(x: Ut(x))
(b) K* = Mg(<<x,y>,z>: Kn(z,x,y))
(c) neg* = Mg(<x,y>: neg(x,y))

Dernest kan man betrakte de følgende formler i L;e[P;0]:

B1 Kn(z,x,y) –> x,y,zêU
B2 Neg(x,y) –> x,yêU
B3 x,yêU –> (E!z)(Kn(z,x,y))
B4 xêU–> (E!z)(neg(z,x))
B5 x,y,zêU –> K*(K*(x,y),z) = K*(x,K*(y,z))
B6 x,yêU–> K*(x,y) = K*(y,x)
B7 (Ax)(Ay)(x,yêU & (Ez)(zêU & K*(x,neg*(y))=K*(z,neg*(z))) –>
K*(x,y)=x)
B8 (Ax)(Ay)(x,yêU & K*(x,y) = x –>
(Az)(zêU –> K*(x,neg*(y)) = K*(z, neg*(z))))
B9 M(U) & Ca(U) ≥ Aleph;0

Den formelmengden som inneholder formlene B1 – B9 og bare disse formlene kalles for G;0. I det følgende vil så teorien ZFCu(L;e[P;0])[G;0] bli studert. Denne teorien kalles her for U;1.

Det er nå lett på grunnlag av aksiomene B1 - B9 å vise at den følgende sats er et teorem i teorien U;1:

Teorem 1:<U,K*,neg*> er en Boolsk algebra.

Relasjonen Imp over mengden av alle utsagn U defineres ved:

Definisjon 2: Imp(x,y) <–> K*(x,y) = x

Uttrykket "Imp(x,y)" leses "Utsagnet x impliserer utsagnet y". Definisjonen ovenfor gjenspeiler det vanlige betydningsinnhold som tillegges dette uttrykk fordi man har at et utsagn x nettopp impliserer et annet utsagn y hvis og bare hvis konjunksjonen av utsagnene x og y er identisk med x.

Det kontradiktoriske utsagn k* og det tautologiske utsagn t* defineres ved:

Definisjon 3: (a) k* = (iy)(yêU & (Ax)(xêU –> y=K*(x,neg*(x))))
(b) t* = neg*(k*)

Videre defineres hva som menes med uttrykket " x er et maksimalt konsistent utsagn", i symboler "Max;u(x)" ved :

Definisjon 3.1: Max;u(x) <–> (xêU & x≠k* &
(Ay)(yêU –> (Imp(y,x) <–> (y=x v y=k*))))

Mao. er et maksimalt konsistent utsagn x et utsagn som er konsistent og som dessuten er slik at ethvert utsagn som impliserer x enten er identisk med x eller er kontradiktorisk.

I tillegg til B1 – B9 skal også den følgende formel betraktes:

B10 (Ay)(yêU & y≠k* –> (Ez)(Max;u(z) & Imp(z,y))

Denne formelen sier at i den Boolske algebra <U,K*,neg*> er ethvert element som ikke er identisk med det kontradiktoriske utsagn av en slik art at det finnes et maksimalt konsistent utsagn som impliserer det. Ved hjelp av B10 kan man vise at <U,K*,neg*> er en atomisk Boolsk algebra.

Tilslutt betraktes den følgende formel i L;e[P;0]:

B11 M(a) & a Inkl U & a≠ø –> (Ey)(yêU & (Ax)(xêa –> Imp(x,y)) &
(Az)(zêU & (Ax)(xêa –> Imp(x,z)).–> Imp(y,z))))

Denne formelen uttrykker at enhver ikke-tom mengde av utsagn a har en minste øvre grense med hensyn på den partielle ordningen <U,Imp>.

Teorien U;1 utvidet med formlene B10 og B11 som nye ikke-logiske aksiomer kalles her for U;1+. I denne teori kan man bevise det følgende teorem:

Teorem 2:<U,K*,neg*> er en Boolsk algebra som er atomisk og komplett.

I denne forbindelse bemerkes at uttrykkene "atomisk Boolsk algebra" og "komplett Boolsk algebra" er definert slik som i Stoll [1] side 271.

Den naturlige Boolske algebra over en ikke-tom mengde X defineres som den Boolske algebraen <Pt(X), Sn;X, c;X> hvor Sn;X og c;X er de vanlige snitt- og komplementeringsoperasjonene over mengden X. Disse to operasjonene er formelt sett definert slik:

Sn;X = Mg(<<x,y>,z>: x,yêPt(X) & z=Sn(x,y))
c;X = Mg(<x,y>: x,yêPt(X) & x= c(y))

I lys av Teorem 5.4 i Stoll [1], Ch 6, §5, og de bemerkningene som følger dette teorem, har vi at den følgende sats holder:

Teorem 3:Anta B;1= <B,Sn,c> er en Boolsk algebra som er atomisk og komplett. La A være mengden av atomer i B;1. La d være funksjonen som til hvert element i B tilordner mengden av alle atomer aêB der a≤b. La tilslutt B;2= <Pt(A), Sn;A,c;A> være den naturlige Boolske algebra over A. Da gjelder at d er en isomorfi mellom B;1 og B;2, dvs. at følgende holder:
(i) d: B –(1-1,på)–>Pt(A)
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêB –> d(Sn(x,y)) = Sn;A(d(x),d(y)))
(iii) (Ax)(xêB –>d(c(x)) = c;A(d(x))

Dette teoremet bevises slik som beskrevet i Stoll [1], Ch 6, §5, i kommentarene til det som der er oppført som Teorem 5.4.

Uttrykket "I;+" betegner i det følgende klassen av alle maksimalt konsistente utsagn. Sn;+ og c;+ betegner henholdsvis snitt og komplement- operasjonene over potensmengden til I;+. Den følgende definisjon fastsetter presist betydningen til disse uttrykk:

Definisjon 3.1: (a) I;+ = Mg(x: Max;u(x))
(b) Sn;+ = Mg(<<x,y>,z>: x,yêPt(I;+) & z=Sn(x,y))
(c) c;+ = Mg(<x,y>: xêPt(I;+) & y=((I;+) – x))

Den følgende sats er helt triviell:

Teorem 4:<Pt(I;+),Sn;+,c;+> er den naturlige Boolske algebra over I;+

Funksjonen μ;+ defineres ved:

μ;+(y) = Mg(x: Max;u(x) & Imp(x,y)) hvor det forusettes at yêU

Ved hjelp av Teorem 2 – Teorem 4 og de definisjoner som tidligere har blitt gitt kan man utlede:

Teorem 5:Sett S;1=<U,K*,neg*> og S;2 = <Pt(I;+),Kn;+,c;+>. Da gjelder følgende:
(i) μ;+ : U –(1-1,på)–> Pt(I,+)
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêU –> μ;+(K*(x,y)) = Sn;+(μ;+(x),μ;+(y)))
(iii) (Ax)(xêU –> μ;+(neg*(x)) = c;+(μ;+(x)))

Mao. er μ;+ en isomorfi mellom de to Boolske algebraene S;1 og S;2.

Det er hensiktsmessig å definere en relasjon True;+ ved:

True;+ = Mg(<x,y>: xêI;+ & yêU & xêµ;+(y))

Ved hjelp av Teorem 5 er det da mulig å gi bevis for den følgende sats:

Teorem 6:(a) M(I;+) & Ca(I;+)≥ Aleph;0
(b) x,yêU –> (x=y <–> (Aw)(wêI;+ –>
(True;+(w,x) <–> True;+(w,y))))
(c) True;+(x,y) –> xêI;+ & yêU
(d) (M(a) & a Inkl I;+) –> (Ey)(yêU &
(Aw)(wêI;+ –> (True;+(w,y) <–> wêa)))

Studerer man Teorem 6 ser man at de karakteristiske aksiomene om utsagn i teorien T;1 fremkommer om man i formlene (a) – (d) erstatter "I;+" med "I" og "True;+" med "True". Det følgende intepretasjonsteorem som viser at teorien T;1 kan intepreteres inn i U;1+ kan derfor oppfattes som et korollar til Teorem 6:

Teorem 7:La g være en intepretasjon av L;e[Δ;0] inn i L;e[P;0] som for det første er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som for det andre oppfyller de følgende krav:
(a) g(MV(x)) = (xêI;+)
(b) g(True(w,x)) = (True;+(w,x))
(c) g(Ut(x)) = Ut(x)
Da gjelder: g"Th(T;1) Inkl Th(U;1+)

Hovedsakelig på grunn av plasshensyn vil ikke beviset for denne satsen bli gitt her. Beviset er imidlertid også såpass enkelt at det kan overlates til leseren.

Teorem 7 viser at T;1 kan intepreteres inn i U;1+. Det er også mulig å vise at det omvendte er tilfelle, dvs. at U;1+ kan intepreteres inn i T;1. Dette er forholdsvis enkelt. Sett per definisjon:

Kn(x,y,z) <–> [Ut(x) & Ut(y) &Ut(z) & (Aw)(MV(w) –>
(True(w,x) <–> True(w,y) & True(w,z)))]
neg(x,y) <–> [Ut(x) & Ut(y) & (Aw)(MV(w) –> (True(w,x) <–> ¬True(w,y)))]

Det er da lett å vise at aksiomene B1 – B11 kan utledes i T;1. Mer presist kan man også formulere dette resultatet som et intepretasjonsteorem på den følgende måte:

Teorem 8:La h være en intepretasjon av L;e[P;0] inn i L;e[Δ;0] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som desuten oppfyller de følgende krav:
(a) h(Ut(x)) = Ut(x)
(b) h(Kn(x,y,z)) = [Ut(x) & Ut(y) &Ut(z) &
(Aw)(MV(w) –>
(True(w,x) <–> True(w,y) & True(w,z)))]
(c) h(neg(x,y)) = [Ut(x) & Ut(y) &
(Aw)(MV(w) –> (True(w,x) <–> ¬True(w,y)))]
Da gjelder: h"Th(U;1+) Inkl Th(T;1)

Beviset for denne satsen utelates også av plasshensyn.

Fra Teorem 7 og Teorem 8 ser man at T;1 og U;1+ i en viss forstand kan oppfattes som ekvivalente. Man kan altså betrakte U;1+ som en reaksio-matisering av teorien T;1. Sett i sammenheng med de andre alternative aksiomatiseringene av T;1 som vi formulerte tidligere bidrar dette til ytterligere å kaste noe lys over teorien T;1. Teorem 7 er også interessant fordi det viser at det er logisk sett mulig å identifisere mulige verdener med visse spesielle utsagn, nemlig maksimalt konsistente utsagn. Tilslutt bemerkes at Teorem 3, som er et generelt representasjonsteorem for atomiske og komplette Boolske algebraer, opptrer som et mellomliggende ledd i beviset for ekvivalensen mellom T;1 og U;1+. På denne måten viser dette teoremet hvordan teorien om Boolske algebraer kan trekkes inn for å belyse teorien T;1.

APPENDIX B

Et sammendrag av systemet ZFCu(L).

Et sammendrag av systemet ZFCu(L).

I dette tillegget vil det bli gitt en kortfattet beskrivelse av det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L) der L er et første-ordens språk som enten er identisk med L;e, eller en utvidelse av dette språk med nye ikke-logiske predikatkonstruksjoner.

Det bemerkes at L;e er det første-ordens språket som ved siden av de logiske konstruksjonene: –>, ¬, v, &, <–>, A, E og =, utelukkende inneholder de to ikke-logiske predikatkonstruksjonene "xêy", som leses "x er et element i mengden y", og"M(x)" som leses "x er en en mengde".

I det følgende må man derfor anta at L enten er L;e eller en utvidelse av dette språket med visse nye ikke-logiske predikater.

La DêFm(L). Da sies D å være et *setningslogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det finnes formler A,B og C i L slik at D er identisk med en av de følgende formler:

(1) A–>(B–>A)
(2) (¬B–> ¬A) –> (A –>B)
(3) (A–>(B–>C)) –> ((A–>B) –> (A–>C))

D sies å være et *predikatlogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det enten finnes formler A,B i L og variabeltegn x,y i L og B er nøyaktig som A unntatt eventuelt ved å ha y som fri variabel på et eller flere steder hvor A har x som fri variabel og D er :

(4) (Ax)A–> B

eller det er slik at det finnes formler A,B i L og et variabeltegn x der x ikke forekommer fri i B og hvor D er identisk med den følgende formel:

(5) (Ax)(B–>A) –> (B –> (Ax)A)

Tilslutt sies D å være et *identitetslogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det finnes et variabeltegn x i L og D er formelen:

(6) (Ax)(x=x)

eller det finnes variabeltegn x,y i L, og formler A,B i L, der B er som A bortsett eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor B har en fri forekomst av x og D er den følgende formel:

(7) x=y –> (A <–> B)

Et *logisk* aksiom i L er da en formel i L som enten er et setningslogisk aksiom, et predikatlogisk eller et identitetslogisk aksiom i L.

De følgende formler i L kalles henholdsvis for mengdeaksiomet, urmengdeaksiomet, ekstensjonalitetsaksiomet, nullmengdeaksiomet, parmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, fundierungsaksiomet og utvalgsaksiomet i L:

M1 (Ax)(Ay)(xêy –> M(y))

M2 (Ey)(M(y) & (Ax)(xêy <–> ¬M(x)))
M3 (Ax)(Ay)(M(x) & M(y) & (Ez)(zêx)& (Ez)(zêy) &
(Az)(zêx <–> zêy) –> x=y)
M4 (Ey)(M(y) & ¬(Ez)(zêy) & (Aw)(M(w) &¬(Ez)(zêw). –> w=y))
M5 (Ay)(Az)((Ex)(M(x) & (Aw)(wêx <–> (w=y v w=z))))
M6 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (Ew)(zêw & wêx))))
M7 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (M(z) & (Aw)(wêz –> wêy)))))
M8 (Ex)(M(x) & (Ay)(M(y) &¬(Ez)(zêy) –> yêx) &
(Az)(M(z)&zêx –> (Ew)(M(w) & wêx & (Ar)(rêw <–> r=z))))
M9 (Ax)(M(x) &(Ew)(wêx) –> (Ey)(yêx & ¬(Ez)(zêy &zêx)))
M10 M(x) & (Ay)(yêx –> (M(y)&(Ez)(zêy))) &
(Ay)(Az)(y,zêx & y≠z –> ¬(Ew)(wêy &wêz)) –>
(Ez)(M(z) & (Ay)(yêx –> (Er)(rêy &rêz &(At)(têy &têz –> t=r))))

I tillegg til disse formlene som nå har blitt nevnt sies A å være et replacement-aksiom i L hvis og bare hvis det finnes en formel B i L som har x og y som fri variabler og der variablene w og w' ikke forekommer fri, og hvor A er identisk med formelen:

M11 (Ax)(Ay)(Az)(B(x,y) & B(x,z) –> y=z) & M(w) –>
(Ew')(M(w') & (Ax)(xêw' <–> (Ey)(yêw & B(y,x))))

Tilslutt sies A å være et utsondringsaksiom i L hvis og bare hvis det finnes en formel B som ikke inneholder x og y som fri variabler og A er identisk med den følgende formel:

M12 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (zêy & B))))

Det mengdeteoretiske system ZFCu(L) er nå den første-ordens teorien i L hvis logiske aksiomer er alle de logiske aksiomene i L slik disse har blitt definert ovenfor og der de ikke-logiske aksiomene i L er M1 – M10 samt alle utsondrings- og replacement-aksiomer i L. Slutningsreglene i teorien er utelukkende modus ponens og universell generalisering.

Dette system er detaljert beskrevet i Rognes [1]. Der er det også gitt detaljerte definisjoner av alle de rent mengdeteoretiske begrepene som vi vil benytte oss av i forbindelse med denne teorien.

Det kan være passende å fremsette to bemerkninger helt tilslutt. Fra aksiomlisten M1 – M12 ser man at aksiomene M3 – M10 og aksiomskjemaene M11 og M12 er de vanlige aksiomene i ZFC. Men siden våre variabler er generelle og vi har føyd til mengdepredikatet M(x) blir formuleringen av de enkelte aksiomer litt annerledes enn vanlig. Aksiomene M1 og M2 sier henholdsvis at noe er et element i noe annet bare om det siste er en mengde og at det finnes en mengde som inneholder nøyaktig de og bare de entiteter som er ikke-mengder, dvs. de såkalte urindivider. Det sistnevnte aksiom blir mer utførlig diskutert i Rognes [5] og [6]. Leseren anbefales å konsultere disse to arbeidene om det ønskes mer informasjon om denne versjonen av Zermelo- Fraenkel systemet.

Det skulle være klart at dersom L' er en utvidelse av L, som i sin tur er en utvidelse av L;e, så er mengden av de logiske aksiomene i L' ikke identisk med mengden av de logiske aksiomene i L. Dette har sin bakgrunn i følgende forhold: Utvides L til L' vil L' inneholde konstruksjoner som ikke foreligger i L. De formlene som inneholder disse nye konstruksjonene kan da ikke være formler i L. La A;0 være en slik formel i L' og B;0 en annen slik formel. Da vil f.eks.
A;0 –>(B;0–>A;0) være et logisk aksiom i L'. Men denne formelen er ikke en formel i L og

kan da heller ikke være noe logisk aksiom i L. Det samme gjelder de andre logiske aksiomskjemaene.

En lignende bemerkning kan også fremsettes i forbindelse med replacementaksiomene og utsondringsaksiomene. Er L' en genuin utvidelse av L vil f. eks. klassen av utsondringsaksiomer i L' inneholde klassen av utsondringsaksiomene i L som en ekte delmengde. For anta A;0 er en formel i L' som ikke er med i L og anta at A;0 er lukket. Anta videre at B er en formel i L der variablene x,y ikke forekommer fri. Da er A;0&B en formel i L', men ikke noen formel i L. Den følgende formel er derfor et utsondringsaksiom i L', men ikke i L:

(Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (zêy & A;0&B))))

Lignende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med replacementaksiomet, dvs. aksiomskjemaet M12.

***

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk .*

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.